

#### 4. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

**1. Aufgabe:** Wir betrachten ein  $N$ -Perioden Binomialmodell mit Preisprozess ( $k = 1, \dots, N$ )

$$S_k = S_{k-1} \times (1 + \text{ret}_{t_k})$$

mit

$$\text{ret}_{t_k} = \begin{cases} +q & \text{mit W'keit } w_{\text{up}} = w(+q) := 1/2 \\ -q & \text{mit W'keit } w_{\text{down}} = w(-q) := 1/2 \end{cases}$$

Wir wollen die folgende Notation vereinbaren: Es sei

$$F = F(\{\text{ret}_{t_k}\}_{k=1}^N) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$$

eine beliebige Funktion. Dann definieren wir ('die Preise  $S_0, \dots, S_k$  haben sich bereits realisiert, stehen schon fest')

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F \mid \{S_j\}_{j=0}^k] &\stackrel{\text{Notation}}{=} \mathbb{E}_{\{k+1, \dots, N\}}[F(\{\text{ret}_{t_k}\}_{k=1}^N)] \\ &:= \sum_{\text{ret}_{t_{k+1}} \in \{-q, +q\}} w(\text{ret}_{t_{k+1}}) \cdots \sum_{\text{ret}_{t_N} \in \{-q, +q\}} w(\text{ret}_{t_N}) F(\{\text{ret}_{t_k}\}_{k=1}^N) \end{aligned}$$

Insbesondere, wenn wir über alle returns den Erwartungswert nehmen, setzen wir

$$\mathbb{E}[F] = \mathbb{E}_{\{1, \dots, N\}}[F] := \sum_{\text{ret}_{t_1} \in \{-q, +q\}} w(\text{ret}_{t_1}) \cdots \sum_{\text{ret}_{t_N} \in \{-q, +q\}} w(\text{ret}_{t_N}) F(\{\text{ret}_{t_k}\}_{k=1}^N)$$

Berechnen Sie dann die folgenden Erwartungswerte:

- a)  $\mathbb{E}[S_N]$
- b)  $\mathbb{E}[S_N \mid \{S_j\}_{j=0}^k]$
- c)  $\mathbb{E}[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N S_m]$
- d)  $\mathbb{E}[\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N S_m \mid \{S_j\}_{j=0}^k]$
- e)  $\mathbb{E}[\frac{S_0}{S_N}]$
- f)  $\mathbb{E}[\frac{S_0}{S_N} \mid \{S_j\}_{j=0}^k]$

*Bemerkung:* Die eigentliche Rechnung ist nicht so schwierig, die Übung besteht mehr darin, sich zu überlegen, ob das Ergebnis eine reine Zahl ist oder ob und welche Buchstaben dann noch im Ergebnis auftauchen.