

### 3. Übungsblatt zur Vorlesung Finanzmathematik I

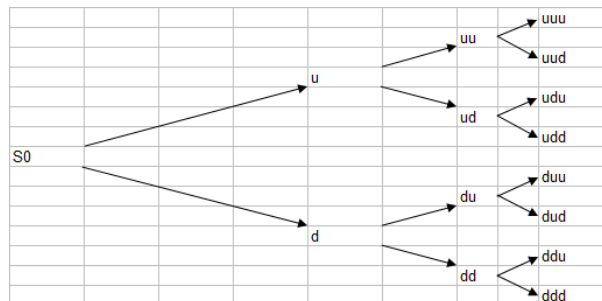
1. **Aufgabe:** Wir betrachten ein 3-Perioden Binomialmodell mit Preisprozess

$$S_k = S_{k-1} \times (1 + \text{ret}_k)$$

mit Returns gegeben durch  $\text{ret}_k \in \{+10\%, -10\%\}$  für  $k = 1, 2, 3$  und nehmen an, dass die Zinsen Null sind,  $r = 0$ . Es sei  $S_0 = 100$ . Wir betrachten eine digitale Barrier Option mit Auszahlung

$$H(\{S_k\}) = \begin{cases} 100 & \text{falls } \min_{k \in \{0,1,2,3\}} S_k \geq 85 \\ 0 & \text{falls } \min_{k \in \{0,1,2,3\}} S_k < 85 \end{cases} .$$

- a) Berechnen Sie den Preis  $V_0$  dieser Option. Machen Sie sich dazu zunächst klar, dass es jetzt nicht mehr ausreichend ist, einen rekombinierenden Binomial-Baum mit 4 Endpunkten zu betrachten (wie im letzten Übungsblatt), sondern Sie müssen folgende Baumstruktur betrachten,



$n$ -Perioden Binär-Baum mit  $2^n$  Endpunkten,  $n = 3$

Berechnen Sie dann wieder die  $V_k$  an allen Knotenpunkten mit Hilfe der Rekursionsformel aus Theorem 2.1.

- b) Berechnen Sie für jeden Knotenpunkt die  $\delta$ 's, die Anzahl von Aktien, die man halten muss, damit man die Optionsauszahlung  $H$  replizieren kann.
- c) Betrachten Sie jetzt die folgenden 2 Preis-Pfade:

$$\text{Pfad}_1 := \{\text{down, up, down}\}$$

$$\text{Pfad}_2 := \{\text{down, down, up}\}$$

Zeigen Sie explizit für diese beiden Pfade, dass die replizierende Strategie definiert durch die  $\delta$ 's aus Teil (b) tatsächlich die Optionsauszahlung  $H$  replizieren tut.