Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann

WS 2023/24

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Finanzmathematik I

1. Aufgabe (Reduktion der BS-PDE auf die Diffusionsgleichung): Die Black-Scholes partielle Differentialgleichung (Partial Differential Equation) für eine europäische, pfadunabhängige Option mit Auszahlung $H = H(S_T)$ lautet

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{1}$$

mit End-Bedingung

$$V(S,T) = H(S)$$

Dabei ist $V(S_t, t)$ der Wert der Option zur Zeit $t \in [0,T]$ und $S = S_t$ der Wert des Underlyings zur Zeit t. Das r ist der jährliche Zinssatz, σ ist die jährliche Volatilität des Underlyings und das T ist die Laufzeit der Option, ausgedrückt in Jahren[1].

a) Machen Sie den Ansatz

$$V(S,t) = V(\, e^{\sigma x}, T - \tau \,) =: e^{-r\tau}\, v(x,\tau)$$

mit

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\sigma} \log S \\ \tau &= T - t \end{aligned}$$

und zeigen Sie, dass die BS-PDE (1) äquivalent ist zu

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{r}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \tau} \tag{2}$$

mit Anfangsbedingung

$$v(x,0) = H(\, e^{\sigma x} \,) \; .$$

b) Machen Sie dann den Ansatz

$$v(x,\tau) = e^{-\alpha x - \beta \tau}\, u(x,\tau)$$

[1] anstatt r, σ und T in Jahren anzugeben, kann man diese Grössen auch etwa in Tagen angeben, ist aber eher unüblich

und zeigen Sie, dass sich durch geeignete Wahl von α und β die PDE (2) auf die Diffusionsgleichung

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \;=\; \frac{\partial u}{\partial \tau} \tag{3}$$

mit Anfangsbedingung

$$u(x,0) \;=\; e^{+\alpha x}\, v(x,0) \;=\; e^{+\alpha x}\, H(\, e^{\sigma x}\,)$$

reduzieren lässt.

c) Zeigen Sie, dass die Diffusionsgleichung (3) zu belieber Anfangsbedingung $u_0(x) := u(x,0)$ durch

$$u(x,\tau) \;=\; \int_{\mathbb{R}} u_0(y)\, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{2\tau}}\, dy \tag{4}$$

gelöst wird.

2. Aufgabe (Lösung der Black-Scholes PDE): Zeigen Sie jetzt mit Hilfe der Resultate aus der ersten Aufgabe: Die Lösung der Black-Scholes PDE (1) mit End-Bedingung $V(S_T,T) = H(S_T)$ lässt sich schreiben als

$$V(S_t,t) \;=\; e^{-r\,(T-t)} \int_{\mathbb{R}} H\Big(\, S_t\, e^{\sigma\sqrt{T-t}\,y \,+\, (r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}\,\Big)\, e^{-\frac{y^2}{2}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \tag{5}$$

Dabei ist $S = S_t$ der Wert des Underlyings zur Zeit $t \in [0,T]$.

Mit Hilfe der Gleichung (5) werden wir dann die berühmten Black-Scholes Formeln für die Preise von Standard Call- und Put-Optionen herleiten.

Dieses Übungsblatt wird in der Vorlesung vorgerechnet.