Hochschule RheinMain
 Finanzmathematik I
Prof. Dr. D. Lehmann
 WS 2023/24

Lösungen Blatt 9
Finanzmathematik I

Aufgabe 1: Wir benutzen die Ito-Formel

$$f(x_T) - f(x_0) \;=\; \int_0^T f'(x_t)\, dx_t \;+\; \tfrac{1}{2} \int_0^T f''(x_t)\, dt$$

oder

$$\int_0^T f'(x_t)\, dx_t \;=\; f(x_T) - f(x_0) \;-\; \tfrac{1}{2} \int_0^T f''(x_t)\, dt \tag{1}$$

a) Wir setzen $f(x) = \frac{x^2}{2}$. Gleichung (1) liefert dann

$$\begin{aligned} \int_0^T x_t\, dx_t &= \tfrac{x_T^2}{2} - 0 - \int_0^T \tfrac{1}{2} \times 1\; dt \\ &= \tfrac{x_T^2}{2} - \tfrac{T}{2}\,. \end{aligned}$$

b) Wir setzen $f(x,t) = \frac{x^3}{3}$. Gleichung (1) liefert dann

$$\begin{aligned} \int_0^T x_t^2\, dx_t &= \tfrac{x_T^3}{3} - 0 - \int_0^T \tfrac{1}{2} \times 2x_t\; dt \\ &= \tfrac{x_T^3}{3} - \int_0^T x_t\, dt\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2: **a)** Wir bekommen

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dx}\, e^{-\frac{x^2}{2}} &= -\,x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \left(\tfrac{d}{dx}\right)^2 e^{-\frac{x^2}{2}} &= \tfrac{d}{dx}\left\{ -\,x\, e^{-\frac{x^2}{2}} \right\} \;=\; [\,-1 + x^2\,]\, e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \left(\tfrac{d}{dx}\right)^3 e^{-\frac{x^2}{2}} &= \tfrac{d}{dx}\left\{ [\,-1 + x^2\,]\, e^{-\frac{x^2}{2}} \right\} \;=\; \big[\,2x + [\,-1 + x^2\,](-x)\big]\, e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= [\,3x - x^3\,]\, e^{-\frac{x^2}{2}} \\ \left(\tfrac{d}{dx}\right)^4 e^{-\frac{x^2}{2}} &= \tfrac{d}{dx}\left\{ [\,3x - x^3\,]\, e^{-\frac{x^2}{2}} \right\} \;=\; \big[\,3 - 3x^2 + [\,3x - x^3\,](-x)\big]\, e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= [\,3 - 6x^2 + x^4\,]\, e^{-\frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} h_0(x) &= 1 \\ h_1(x) &= x \\ h_2(x) &= x^2 - 1 \\ h_3(x) &= x^3 - 3x \\ h_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3 \end{aligned}$$

b) Mit der Taylor-Formel bekommen wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \tfrac{t^n}{n!} \, \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-t)^n}{n!} \, \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} \\ &= e^{\,xt - \frac{x^2+t^2}{2}} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \, \tfrac{t^n}{n!} &= e^{+\frac{x^2}{2}} \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \tfrac{t^n}{n!} \, \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &= e^{+\frac{x^2}{2}} \times e^{\,xt - \frac{x^2+t^2}{2}} \\ &= e^{\,xt - \frac{t^2}{2}} \;. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: **a)** Wir haben

$$\begin{aligned} dF_{t_k} &= F_{t_k} - F_{t_{k-1}} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \, I_n(t_k) - \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \, I_n(t_{k-1}) \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left[I_n(t_k) - I_n(t_{k-1}) \right] \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} dI_n(t_k) &:= I_n(t_k) - I_n(t_{k-1}) \\ &\overset{\text{(3) vom ÜBlatt9}}{=} \sqrt{dt}\,\phi_k \sum_{j_{n-2}=1}^{k-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_{n-2}} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_1} \sum_{j_0=1}^{j_1-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_0} \\ &= dx_{t_k} \sum_{j_{n-2}=1}^{k-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_{n-2}} \cdots \sum_{j_1=1}^{j_2-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_1} \sum_{j_0=1}^{j_1-1} \sqrt{dt}\,\phi_{j_0} \\ &= dx_{t_k} \, I_{n-1}(t_{k-1}) \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} dF_{t_k} &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \, dI_n(t_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \, dx_{t_k} \, I_{n-1}(t_{k-1}) \\ &= \lambda \, dx_{t_k} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \, I_{n-1}(t_{k-1}) \\ &= \lambda \, dx_{t_k} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \, I_m(t_{k-1}) \\ &= \lambda \, dx_{t_k} \, F_{t_{k-1}} \end{aligned} \tag{2}$$

Das ist exakt die richtige diskrete Indizierung für eine stochastische DGL im Ito-Sinne, auf der rechten Seite von (2) steht ein $F_{t_{k-1}}$ mit Zeitindex t_{k-1} so dass dx_{t_k} und $F_{t_{k-1}}$ stochastisch unabhängige Grössen sind, in dem $F_{t_{k-1}}$ kommen nur die $\phi_1, ..., \phi_{k-1}$ vor, aber kein ϕ_k.

b) Die Lösung von (2), das ist dasselbe wie die Black-Scholes SDGL mit $\mu = 0$ und $\sigma = \lambda$, haben wir in der Vorlesung hergeleitet. Sie lautet also

$$F_t = F_0 \, e^{\lambda \, x_t - \frac{\lambda^2}{2} t} \stackrel{F_0=1}{=} e^{\lambda \, x_t - \frac{\lambda^2}{2} t} \; .$$

c) Wir definieren ein $\tilde{\lambda}$ durch

$$\tilde{\lambda} := \sqrt{t} \, \lambda$$

so dass

$$F_t = e^{\lambda \, x_t - \frac{\lambda^2}{2} t} = e^{\tilde{\lambda} \frac{x_t}{\sqrt{t}} - \frac{\tilde{\lambda}^2}{2}}$$

Jetzt benutzen wir die erzeugende Funktion der Hermite-Polynome aus Aufgabe 2b:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) \, \frac{t^n}{n!} = e^{xt - \frac{t^2}{2}}$$

Also,

$$F_t = e^{\tilde{\lambda} \frac{x_t}{\sqrt{t}} - \frac{\tilde{\lambda}^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n\big(\tfrac{x_t}{\sqrt{t}}\big) \, \frac{\tilde{\lambda}^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{t}^{\,n} \, h_n\big(\tfrac{x_t}{\sqrt{t}}\big) \, \frac{\lambda^n}{n!}$$

Andererseits ist nach Definition

$$F_t = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \, I_n(t)$$

Also bekommen wir

$$I_n(t) = \frac{1}{n!} \times \sqrt{t}^{\,n} \, h_n\big(\tfrac{x_t}{\sqrt{t}}\big)$$

und die Formel ist bewiesen.