Hochschule RheinMain WS 2023/24
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen Übungsblatt 6
Finanzmathematik I

Aufgabe 1: Es ist

$$
\begin{aligned}
p_s(x,y)p_t(y,z) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2t})y^2+(\frac{x}{s}+\frac{z}{t})y} \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{s+t}{2st}(y^2-2\frac{xt+zs}{s+t}y)} \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2}\, e^{\frac{s+t}{2st}(\frac{xt+zs}{s+t})^2} \\
&= \frac{e^{-\frac{x^2}{2s}-\frac{z^2}{2t}}}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2}\, e^{\frac{(xt+zs)^2}{2st(s+t)}} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-x^2(\frac{1}{2s}-\frac{t}{2s(s+t)})-z^2(\frac{1}{2t}-\frac{s}{2t(s+t)})+\frac{xz}{s+t}}\, e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{x^2}{2(s+t)}-\frac{z^2}{2(s+t)}+\frac{xz}{s+t}}\, e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}}\, e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2}
\end{aligned}
$$

Also

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} p_s(x,y)p_t(y,z)\,dy &= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s+t}{2st}(y-\frac{xt+zs}{s+t})^2}dy \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s+t}{2st}v^2}dv \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}}\, \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{st}{s+t}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi(s+t)}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \\
&= p_{s+t}(x,z)
\end{aligned}
$$

und die Aussage ist bewiesen.

Aufgabe 2: ..machen wir in der Vorlesung.