

4.2 Der Laplace'sche Entwicklungssatz und inverse Matrizen

Der Laplace'sche Entwicklungssatz ergibt sich sofort aus der Linearität der Determinantenfunktion. Das einzige, was die Sache etwas kompliziert macht, ist, dass im allgemeinen Fall, im $n \times n$ Fall, die Notationen etwas aufwändig werden. Deshalb tun wir uns hier zunächst mal den Satz für den 3×3 Fall verdeutlichen, die Logik für den allgemeinen $n \times n$ Fall ist dann völlig analog.

Betrachten wir also die Determinante

$$\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Wegen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

können wir dann schreiben, die Determinantenfunktion ist linear,

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 \det \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} + a_2 \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} + a_3 \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Notation}}{=} a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 \quad (4.24)$$

wobei wir in der letzten Zeile die Abkürzungen

$$A_1 := \det \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

benutzt haben. Genauso bekommen wir dann auch die Gleichungen

$$\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = b_1 B_1 + b_2 B_2 + b_3 B_3 \quad (4.26)$$

$$\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = c_1 C_1 + c_2 C_2 + c_3 C_3 \quad (4.27)$$

wobei dann also etwa

$$B_1 := \det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix}, \quad C_3 := \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Betrachten wir jetzt die Matrix

$$M := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Dann gilt nach Definition des Matrix-Produktes:

$$M^T \cdot A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_k A_k a_k & \sum_k A_k b_k & \sum_k A_k c_k \\ \sum_k B_k a_k & \sum_k B_k b_k & \sum_k B_k c_k \\ \sum_k C_k a_k & \sum_k C_k b_k & \sum_k C_k c_k \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

wobei die Summen jeweils von 1 bis 3 gehen, also $\sum_k := \sum_{k=1}^3$. Betrachten wir die Hauptdiagonalelemente. Das sind genau die Ausdrücke, die wir in (4.24) und (4.26,4.27) bekommen haben, da kommt jeweils $\det A$ raus:

$$\sum_k A_k a_k = \sum_k B_k b_k = \sum_k C_k c_k = \det A \quad (4.31)$$

Betrachten wir dann ein beliebiges off-diagonales Element, etwa das $(3,2)$ -Element. Es ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 C_k b_k &= b_1 C_1 + b_2 C_2 + b_3 C_3 \\ &= b_1 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix} + b_2 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix} + b_3 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Wir benutzen wieder, dass die Determinanten-Funktion linear ist, jetzt für das 3. Argument, wo normalerweise das $\vec{c}$ steht, und können schreiben

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 C_k b_k &= \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{pmatrix} \stackrel{(4.3)}{=} 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Für alle anderen off-diagonalen Matrixelemente geht das dann analog, so dass wir erhalten:

$$M^T \cdot A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 & 0 \\ 0 & \det A & 0 \\ 0 & 0 & \det A \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

Wir teilen diese Gleichung noch durch $\det A$ und bekommen schliesslich

$$\frac{1}{\det A} M^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id \quad (4.35)$$

Damit haben wir eine explizite Formel für das Inverse einer Matrix gefunden, es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} M^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Schliesslich wollen wir noch festhalten, dass sich die A_k, B_k und C_k allesamt als 2×2 Determinanten schreiben lassen. Wir erinnern uns daran, dass wenn man zwei Zeilen oder Spalten vertauscht, dann ändert sich nur das Vorzeichen der Determinante. Für, sagen wir, A_2 bekommen wir dann etwa

$$\begin{aligned} A_2 &:= \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_3 & c_3 \\ 1 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \\ &= + \det \begin{pmatrix} b_1 & 0 & c_1 \\ b_3 & 0 & c_3 \\ b_2 & 1 & c_2 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 \\ b_3 & c_3 & 0 \\ b_2 & c_2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Auf die letzte Determinante in (4.37) wenden wir jetzt die allgemeine Formel

$$\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{1,2,3\}}} \text{sign} \pi \, a_{\pi 1,1} \, a_{\pi 2,2} \, a_{\pi 3,3} \quad (4.38)$$

an. Damit das für die letzte Determinante in (4.37) ungleich 0 ist, muss offensichtlich

$$\pi 3 \stackrel{!}{=} 3$$

sein, effektiv braucht man also nur über die Permutationen von $\{1, 2\}$ zu summieren, so dass

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{pmatrix} = \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{1,2\}}} \text{sign} \pi \, a_{\pi 1,1} \, a_{\pi 2,2} \cdot 1 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Das A_2 ist dann also gegeben durch

$$A_2 := \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Für den $n \times n$ Fall sind die Berechnungen völlig analog und es ergibt sich das folgende

Theorem (Laplace'scher Entwicklungssatz und inverse Matrix): Es sei A eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc|c} & & & & & \\ \hline & & & & & \\ \vec{a}_1 & & \cdots & & \vec{a}_n & \\ & & & & & \\ \hline & & & & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Dann gelten die folgenden Aussagen:

- a) Es sei $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ ein vorgegebener Zeilenindex und $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ ein vorgegebener Spaltenindex. Dann kann man $\det A$ nach der i_0 -ten Zeile oder nach der j_0 -ten Spalte entwickeln, es gelten die Formeln

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} A_{i_0,j} = \sum_{i=1}^n a_{i,j_0} A_{i,j_0} \quad (4.39)$$

mit den Abkürzungen (der Standardbasisvektor $\vec{e}_i$ steht in der j -ten Spalte)

$$A_{i,j} := \det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{j-1}, \vec{e}_i, \vec{a}_{j+1}, \dots, \vec{a}_n] = (-1)^{i+j} \det \left[A \begin{pmatrix} \text{ohne Zeile } i \\ \text{ohne Spalte } j \end{pmatrix} \right] \quad (4.40)$$

b) Die $A_{i,j}$ seien wie in (4.40) definiert und es sei

$$M := (A_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4.41)$$

und es gelte $\det A \neq 0$. Dann ist die inverse Matrix A^{-1} von A gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} M^T = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{n,1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1,n} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

c) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige $n \times n$ Matrix. Dann gilt:

$$A \text{ invertierbar} \Leftrightarrow \det A \neq 0 \quad (4.43)$$

und falls $\det A \neq 0$ ist, gilt:

$$\det[A^{-1}] = \frac{1}{\det A} \quad (4.44)$$

Beweis c) Ist $\det A \neq 0$, dann können wir A^{-1} durch die Formel (4.42) definieren und wegen Teil (a) folgt dann direkt $A^{-1}A = Id$. Sei nun $\det A = 0$. Annahme: A ist invertierbar, es gebe ein A^{-1} mit $A^{-1}A = Id$. Dann folgt

$$1 = \det Id = \det[A^{-1}A] \stackrel{(4.19)}{=} \det[A^{-1}] \det[A] \quad (4.45)$$

Falls $\det A = 0$ ist, steht auf der rechten Seite von (4.45) eine Null was nicht sein kann, also kann es kein A^{-1} geben. Die Formel (4.44) folgt dann ebenfalls sofort aus (4.45). ■

4.3 Die konkrete Berechnung von Determinanten

Zur konkreten Berechnung benutzt man die folgenden beiden Eigenschaften, die sich unmittelbar aus (4.2) und (4.3) ergeben und der Tatsache, dass $\det[A] = \det[A^T]$ gilt:

- (i) Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte, dann ändert sich der Wert einer Determinante nicht.
- (ii) Addiert man zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen Zeile, dann ändert sich der Wert einer Determinante nicht.

Dann versucht man, mit Hilfe der Operationen (i) und (ii) in einer Spalte oder Zeile alle Elemente bis auf eins zu Null zu bekommen und wendet dann den Laplace'schen Entwicklungssatz an. Machen wir ein Beispiel, wir betrachten die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Eine direkte Rechnung mit der Regel von Sarrus (4.21) liefert

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 \cdot 6 \\ &= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0\end{aligned}\quad (4.47)$$

Eine direkte Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes, etwa angewendet auf die erste Zeile, liefert

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} - 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \\ &= 45 - 48 - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = -3 + 12 - 9 = 0\end{aligned}\quad (4.48)$$

Jetzt wollen wir die Regeln (i) und (ii) anwenden und zunächst ein paar Nullen generieren. Nullen in der 3. Spalte bieten sich an, wir multiplizieren die erste Zeile mit -2 und -3 und addieren auf die zweite Zeile und auf die dritte Zeile:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Jetzt sehen wir, dass die zweite und die dritte Zeile linear abhängig sind, und können sofort eine 0 hinschreiben. Oder etwas ausführlicher, wir benutzen die Linearität in der dritten Zeile um eine 2 rauszuziehen, und bekommen dann zwei gleiche Zeilen:

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.50)$$

Man hätte natürlich auch in der ersten Spalte Nullen generieren können, dann hätte man die erste Zeile mit -4 und -7 multiplizieren müssen, sind etwas grössere Zahlen, machen wir das eben,

$$\det A = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} = 0 \quad (4.51)$$

Vielleicht noch ein zweites Beispiel mit einer 4×4 Matrix, wir schreiben die Umformungen direkt hin:

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 13 \end{pmatrix} \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix} = 2 \det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot (10 - 8) = 4\end{aligned}\quad (4.52)$$

Das geht so also deutlich schneller als wenn man etwa alle 24 Terme explizit hinschreiben und aufaddieren würde. Weitere Beispiele schauen wir uns dann noch in den Übungen an.