

4. Determinanten

4.1 Die Definition von Determinanten

Die Determinanten-Funktion ist im Wesentlichen eine Verallgemeinerung des dreidimensionalen Spat-Produktes auf den n -dimensionalen Fall, n Vektoren wird ein, wie beim Spat-Produkt vorzeichenbehaftetes, n -dimensionales Volumen zugeordnet:

$$\begin{aligned} \det &: \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n &\rightarrow \det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Das geht jetzt folgendermassen: Wie das Spat-Produkt auch, soll die Determinanten-Funktion linear sein, ist etwa $\vec{a}_i = \lambda \vec{b}_i + \mu \vec{c}_i$, dann soll gelten

$$\begin{aligned} \det[\vec{a}_1, \dots, \lambda \vec{b}_i + \mu \vec{c}_i, \dots, \vec{a}_n] &= \\ \lambda \det[\vec{a}_1, \dots, \vec{b}_i, \dots, \vec{a}_n] + \mu \det[\vec{a}_1, \dots, \vec{c}_i, \dots, \vec{a}_n] \end{aligned} \quad (4.2)$$

Weiterhin, wenn zwei Vektoren gleich sind, etwa $\vec{a}_i = \vec{a}_j$, soll das Volumen 0 sein. Also:

$$\det[\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots] = 0 \quad \text{falls } \vec{a}_i = \vec{a}_j \quad (4.3)$$

Aus diesen beiden Eigenschaften folgt bereits, dass die Determinante eine antisymmetrische Funktion sein muss, werden zwei Spalten einer Determinante vertauscht, so ändert sich das Vorzeichen:

$$\det[\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots] = - \det[\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots] \quad (4.4)$$

Beweis: Wegen Eigenschaft (4.3) haben wir

$$\begin{aligned} 0 &= \det[\dots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \dots] \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \det[\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \dots] + \det[\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i + \vec{a}_j, \dots] \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \det[\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_i, \dots] + \det[\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots] + \\ &\quad \det[\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots] + \det[\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_j, \dots] \\ &\stackrel{(4.3)}{=} 0 + \det[\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots] + \det[\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots] + 0 \end{aligned}$$

Also muss gelten

$$\det[\dots, \vec{a}_i, \dots, \vec{a}_j, \dots] = - \det[\dots, \vec{a}_j, \dots, \vec{a}_i, \dots]$$

und die Aussage (4.4) ist bewiesen. ■

Wenn wir schliesslich noch fordern, dass das Volumen des n -dimensionalen Einheitswürfels, der durch die Standardbasisvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ aufgespannt wird, gleich 1 sein soll, also

$$\det[\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n] := 1 \quad (4.5)$$

dann ist die Determinanten-Funktion bereits eindeutig festgelegt, wir können die folgende Rechnung machen: Jeden Vektor $\vec{a}_j$ schreiben wir als Linearkombination der Standardbasisvektoren,

$$\begin{aligned}\vec{a}_j &= \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = a_{1,j} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{n,j} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= a_{1,j} \vec{e}_1 + \cdots + a_{n,j} \vec{e}_n = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \vec{e}_i\end{aligned}\quad (4.6)$$

Wir setzen das in die Determinanten-Funktion ein und benutzen die Multi-Linearität:

$$\begin{aligned}\det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] &= \det\left[\sum_{i_1=1}^n a_{i_1,1} \vec{e}_{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^n a_{i_n,n} \vec{e}_{i_n}\right] \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n a_{i_1,1} \cdots a_{i_n,n} \det[\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_n}]\end{aligned}\quad (4.7)$$

Damit die letzte Determinante auf der rechten Seite von (4.7) ungleich 0 ist, müssen alle Vektoren $\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_n}$ verschieden sein, sonst ist die Determinante ja wegen Eigenschaft (4.3) gleich 0. Das bedeutet, die Zahlen $i_1, \dots, i_n$ müssen eine Permutation der Zahlen von 1 bis n sein. Für $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ und $\{1, 2, 3, 4\}$ sehen diese Permutationen etwa folgendermassen aus:

Permutationen von $\{1, 2\}$:

$$(1, 2), (2, 1)$$

Permutationen von $\{1, 2, 3\}$:

$$(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)$$

Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned}(1, 2, 3, 4), (2, 3, 1, 4), (3, 1, 2, 4), (3, 2, 1, 4), (2, 1, 3, 4), (1, 3, 2, 4) \\ (1, 2, 4, 3), (2, 3, 4, 1), (3, 1, 4, 2), (3, 2, 4, 1), (2, 1, 4, 3), (1, 3, 4, 2) \\ (1, 4, 2, 3), (2, 4, 3, 1), (3, 4, 1, 2), (3, 4, 2, 1), (2, 4, 1, 3), (1, 4, 3, 2) \\ (4, 1, 2, 3), (4, 2, 3, 1), (4, 3, 1, 2), (4, 3, 2, 1), (4, 2, 1, 3), (4, 1, 3, 2)\end{aligned}$$

Man sieht, das werden sehr schnell sehr viele und man kann sich überlegen, dass das genau

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n \quad (4.8)$$

Stück sind. Man muss dann also noch die Determinante von Ausdrücken wie etwa

$$\det[\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_4, \vec{e}_2] \stackrel{(4.4)}{=} -\det[\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_4] \stackrel{(4.4)}{=} +\det[\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4] \stackrel{(4.5)}{=} +1 \quad (4.9)$$

berechnen, da kommt also immer nur $+1$ oder -1 raus, je nachdem, wie viele Vertauschungen man braucht, um die Zahlen $i_1, \dots, i_n$ in die Reihenfolge $1, \dots, n$ zu bringen. Typischerweise werden Permutationen mit dem Buchstaben π bezeichnet, $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, und das

Vorzeichen, was bei so einer Determinante dann rauskommt, bezeichnet man dann mit $\text{sign}\pi$, also

$$\det[\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_n}] \stackrel{\text{Notation}}{=} \det[\vec{e}_{\pi 1}, \dots, \vec{e}_{\pi n}] = \text{sign}\pi \quad (4.10)$$

wobei dann also gilt:

$$\text{sign}\pi := (-1)^{n_{\text{Vert}}(\pi)}$$

wobei $n_{\text{Vert}}(\pi)$ dann gleich der Anzahl der Vertauschungen ist, die man braucht, um die Zahlen $\pi 1, \dots, \pi n$ in die Reihenfolge $1, \dots, n$ zu bringen. Damit können wir dann schreiben:

$$\det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{1, \dots, n\}}} \text{sign}\pi \, a_{\pi 1, 1} \cdots a_{\pi n, n} \quad (4.11)$$

und ausgehend von dieser Formel kann man sich etwa leicht überlegen, dass die Determinante einer Matrix A gleich der Determinanten der transponierten Matrix sein muss,

$$\det[A] = \det[A^T] \quad (4.12)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} - & \vec{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n & - \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

und, das ist nicht ganz so offensichtlich, aber man kann es ebenfalls mit Hilfe von Gleichung (4.11) beweisen, es gilt

$$\det[AB] = \det A \det B \quad (4.14)$$

für beliebige $n \times n$ Matrizen A und B . Fassen wir die Resultate in dem folgenden Theorem zusammen:

Theorem: a) Die Determinanten-Funktion

$$\det : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.15)$$

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \rightarrow \det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] \in \mathbb{R}$$

ist durch die drei Eigenschaften (4.2, 4.3) und (4.5) eindeutig festgelegt und man bekommt die Formeln

$$\det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] = \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{1, \dots, n\}}} \text{sign}\pi \, a_{\pi 1, 1} \cdots a_{\pi n, n} \quad (4.16)$$

$$= \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{1, \dots, n\}}} \text{sign}\pi \, a_{1, \pi 1} \cdots a_{n, \pi n} \quad (4.17)$$

Dabei ist $\text{sign}\pi := (-1)^{n_{\text{Vert}}(\pi)}$ wobei $n_{\text{Vert}}(\pi)$ die Anzahl der Vertauschungen angibt, die man braucht, um die Zahlen $\pi_1, \dots, \pi_n$ in die Reihenfolge $1, \dots, n$ zu bringen.

b) Für beliebiges $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det[A^T] = \det[A] \quad (4.18)$$

c) Für beliebige quadratische Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\det[AB] = \det A \det B \quad (4.19)$$

Beweis: Die Formel (4.16) in Teil (a) haben wir gerade hergeleitet. Formel (4.17) kann man sich dann etwa folgendermassen klar machen:

$$\begin{aligned} \det[\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n] &= \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{1, \dots, n\}}} \text{sign}\pi \, a_{\pi 1, 1} \cdots a_{\pi n, n} = \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{1, \dots, n\}}} \text{sign}\pi \, a_{\pi 1, \pi^{-1}(\pi 1)} \cdots a_{\pi n, \pi^{-1}(\pi n)} \\ &= \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{1, \dots, n\}}} \text{sign}\pi \, a_{1, \pi^{-1}(1)} \cdots a_{n, \pi^{-1}(n)} = \sum_{\substack{\text{Permutationen } \pi \\ \text{von } \{1, \dots, n\}}} \text{sign}(\pi^{-1}) \, a_{1, \pi^{-1}(1)} \cdots a_{n, \pi^{-1}(n)} \\ &\stackrel{\sigma := \pi^{-1}}{=} \sum_{\substack{\text{Permutationen } \sigma \\ \text{von } \{1, \dots, n\}}} \text{sign}(\sigma) \, a_{1, \sigma(1)} \cdots a_{n, \sigma(n)} \end{aligned}$$

da wegen $1 = \text{sign} id = \text{sign}(\pi \circ \pi^{-1}) = \text{sign} \pi \cdot \text{sign}(\pi^{-1})$ die Gleichung $\text{sign} \pi = \text{sign}(\pi^{-1})$ erfüllt ist. Aus der Gleichheit von (4.16) und (4.17) folgt dann sofort der Teil (b). Einen Beweis der Formel in Teil (c) kann man etwa in dem Skript *Lineare Algebra für Elektrotechnik* von Volker Bach an der TU Braunschweig finden,

<https://hsrm-mathematik.de/SS2026/LinAlg-ING/LinAlg-ET-WS2526-TU-Braunschweig.pdf>

die Formel (4.19) wird dort im Satz VII.3 auf Seite 72 bewiesen. ■

Die Formeln für 2×2 und 3×3 Determinanten können wir damit sofort explizit hinschreiben (für 4×4 Matrizen könnten wir das natürlich auch machen, allerdings sind das dann schon 24 Terme..)

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (4.20)$$

und

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2 \quad (4.21)$$

Die Formel (4.21) für 3×3 Determinanten kann man auch durch das folgende Schema visualisieren und das wird dann auch als ‘Regel von Sarrus’ bezeichnet:

