

3.3 Drehungen im \mathbb{R}^3

Eine Drehung im \mathbb{R}^3 kann festgelegt werden durch eine Drehachse \vec{n} und einen Drehwinkel φ . Für den Vektor \vec{n} , der die Drehachse angibt, wollen wir annehmen, dass er auf 1 normiert ist, es gelte also

$$\|\vec{n}\| = 1 \quad (3.13)$$

Es sei jetzt ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ vorgegeben. Durch welche analytische Formel können wir dann eine solche Drehung beschreiben? Zunächst mal zerlegen wir das \vec{x} in eine zu \vec{n} parallele Komponente \vec{x}_{\parallel} und eine auf \vec{n} senkrecht stehende Komponente \vec{x}_{\perp} ,

$$\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp} \quad (3.14)$$

mit

$$\vec{x}_{\parallel} := (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (3.15)$$

$$\vec{x}_{\perp} := \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (3.16)$$

Wir haben dann

$$\begin{aligned} \vec{x}_{\parallel} \cdot \vec{x}_{\perp} &= (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} \cdot [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} \cdot \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} \cdot \vec{n} \\ &\stackrel{\vec{n}^2=1}{=} (\vec{x} \cdot \vec{n}) (\vec{n} \cdot \vec{x}) - (\vec{x} \cdot \vec{n}) (\vec{x} \cdot \vec{n}) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

die beiden Komponenten sind also tatsächlich senkrecht zueinander. Es sei jetzt $R = R(\vec{n}, \varphi)$ die gesuchte Drehmatrix (etwa R für Rotation). Drehungen sind lineare Abbildungen, wir können dann schreiben

$$R\vec{x} = R(\vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}) = R\vec{x}_{\parallel} + R\vec{x}_{\perp} = \vec{x}_{\parallel} + R\vec{x}_{\perp} \quad (3.18)$$

da wegen $R\vec{n} = \vec{n}$, die Drehachse bleibt invariant, dann auch gilt

$$R\vec{x}_{\parallel} = R[(\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] = (\vec{x} \cdot \vec{n}) R\vec{n} = (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} = \vec{x}_{\parallel} \quad (3.19)$$

Wir müssen uns also nur noch überlegen, wie man $R\vec{x}_{\perp}$ beschreibt. Der Vektor $R\vec{x}_{\perp}$ liegt in einer Ebene senkrecht zu \vec{n} . Wir wissen schon, dass der Vektor \vec{x}_{\perp} senkrecht auf \vec{n} ist. Einen zweiten Vektor senkrecht zu \vec{n} bekommen wir dann durch das Vektorprodukt, der Vektor

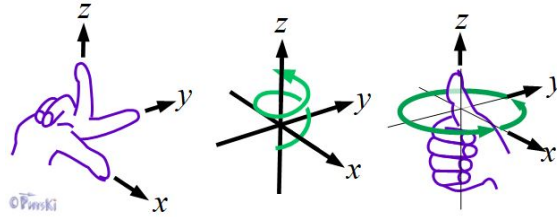
$$\vec{n} \times \vec{x}_{\perp} = \vec{n} \times [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] = \vec{n} \times \vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} \times \vec{n} \stackrel{\vec{n} \times \vec{n} = 0}{=} \vec{n} \times \vec{x} \quad (3.20)$$

ist senkrecht zu \vec{n} und \vec{x}_{\perp} . Mit anderen Worten, die folgenden 3 Vektoren

$$\vec{v}_1 := \vec{n}, \quad \vec{v}_2 := \frac{\vec{x}_{\perp}}{\|\vec{x}_{\perp}\|}, \quad \vec{v}_3 := \frac{\vec{n} \times \vec{x}}{\|\vec{n} \times \vec{x}\|} \quad (3.21)$$

bilden eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^3 , es gilt $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{i,j}$ für $i, j = 1, 2, 3$ mit $\delta_{i,j} = 0$ für $i \neq j$ und 1 für $i = j$. Da der dritte Vektor gerade das Vektorprodukt der ersten beiden Vektoren ist, bilden sie auch ein Rechtssystem.

Wir wollen jetzt die Vektoren \vec{v}_2 und \vec{v}_3 um die \vec{v}_1 -Achse drehen, und zwar im Rechtsschraubensinn. Rechtsschraubensinn meint im wesentlichen folgendes:



Das Bild passt nicht so 100%-tig, dort wird um die z - oder \vec{e}_3 -Achse gedreht, wir drehen um die \vec{v}_1 -Achse. Das geht wieder mit $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$, einmal hat man aber $-\sin \varphi$ und einmal $+\sin \varphi$, man muss sich überlegen, wo steht das Minus? Wenn wir etwa um 90° Grad im Rechtsschraubensinn drehen, dann muss der Vektor \vec{v}_2 nach $+\vec{v}_3$ gehen, und der Vektor \vec{v}_3 muss nach $-\vec{v}_2$ gehen. Das heisst, die korrekte Formel ist

$$\begin{aligned} R \vec{v}_1 &= \vec{v}_1 \\ R \vec{v}_2 &= \cos \varphi \vec{v}_2 + \sin \varphi \vec{v}_3 \\ R \vec{v}_3 &= -\sin \varphi \vec{v}_2 + \cos \varphi \vec{v}_3 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Was bedeutet das jetzt für das $R \vec{x}$? Wir erinnern uns an die Formeln (3.14-3.16) und die Definition der Basis-Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ in (3.21):

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp} = (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \|\vec{x}_{\perp}\| \frac{\vec{x}_{\perp}}{\|\vec{x}_{\perp}\|} \\ &\stackrel{(3.21)}{=} (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{v}_1 + \|\vec{x}_{\perp}\| \vec{v}_2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Also,

$$\begin{aligned} R \vec{x} &= (\vec{x} \cdot \vec{n}) R \vec{v}_1 + \|\vec{x}_{\perp}\| R \vec{v}_2 \\ &\stackrel{(3.22)}{=} (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{v}_1 + \|\vec{x}_{\perp}\| [\cos \varphi \vec{v}_2 + \sin \varphi \vec{v}_3] \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \cos \varphi \|\vec{x}_{\perp}\| \vec{v}_2 + \sin \varphi \|\vec{x}_{\perp}\| \vec{v}_3 \\ &\stackrel{(3.21)}{=} (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \cos \varphi \vec{x}_{\perp} + \sin \varphi \frac{\|\vec{x}_{\perp}\|}{\|\vec{n} \times \vec{x}\|} \vec{n} \times \vec{x} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Nun ist $\|\vec{n} \times \vec{x}\|$ gerade die Fläche des von \vec{n} und \vec{x} aufgespannten Parallelogramms. Das ist gleich Grundseite mal Höhe. Als Grundseite nehmen wir jetzt nicht das \vec{x} , sondern das \vec{n} . Die Höhe ist dann gerade gegeben durch $\|\vec{x}_{\perp}\|$. Also haben wir dann

$$\|\vec{n} \times \vec{x}\| = \text{Fläche Parallelogramm} = \text{Grundseite } \|\vec{n}\| \cdot \text{Höhe } \|\vec{x}_{\perp}\| = 1 \cdot \|\vec{x}_{\perp}\| \quad (3.25)$$

und damit, wenn wir das in (3.24) einsetzen,

$$R \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \cos \varphi [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] + \sin \varphi [\vec{n} \times \vec{x}]$$

Fassen wir die Resultate in dem folgenden Theorem zusammen:

Theorem (Drehungen im \mathbb{R}^3): Eine Drehung $R = R(\vec{n}, \varphi)$ im \mathbb{R}^3 um die Drehachse \vec{n} mit Winkel φ im Rechtsschraubensinn wird beschrieben durch

$$R(\vec{n}, \varphi) \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \cos \varphi [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] + \sin \varphi [\vec{n} \times \vec{x}] \quad (3.26)$$

Dabei muss der Vektor \vec{n} , der in Richtung der Drehachse zeigt, die Länge 1 haben, $\|\vec{n}\| = 1$.

Schauen wir uns dazu ein konkretes Beispiel an:

Beispiel: Matrix-Darstellung einer Drehung um die Achse (1,1,1):

Zunächst einmal müssen wir die Drehachse normieren:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Wegen

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (x + y + z)/\sqrt{3} \quad (3.28)$$

und

$$\vec{n} \times \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} z - y \\ x - z \\ y - x \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

bekommen wir dann

$$\begin{aligned} R(\vec{n}, \varphi) \vec{x} &= (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \cos \varphi [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] + \sin \varphi [\vec{n} \times \vec{x}] \\ &= \frac{x + y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos \varphi \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{x + y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} z - y \\ x - z \\ y - x \end{pmatrix} \\ &= \frac{x + y + z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\cos \varphi}{3} \begin{pmatrix} 2x - y - z \\ 2y - x - z \\ 2z - x - y \end{pmatrix} + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} z - y \\ x - z \\ y - x \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Schreiben wir uns die erste, die zweite und die dritte Koordinate davon separat mal hin:

$$\begin{aligned} [R(\vec{n}, \varphi) \vec{x}]_1 &= \frac{x+y+z}{3} + \frac{\cos \varphi}{3} (2x - y - z) + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} (z - y) \\ [R(\vec{n}, \varphi) \vec{x}]_2 &= \frac{x+y+z}{3} + \frac{\cos \varphi}{3} (2y - x - z) + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} (x - z) \\ [R(\vec{n}, \varphi) \vec{x}]_3 &= \frac{x+y+z}{3} + \frac{\cos \varphi}{3} (2z - x - y) + \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3}} (y - x) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Jetzt ordnen wir die Terme nach x, y und z :

$$\begin{aligned} [R(\vec{n}, \varphi) \vec{x}]_1 &= \frac{1+2\cos\varphi}{3} x + \frac{1-\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi}{3} y + \frac{1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi}{3} z \\ [R(\vec{n}, \varphi) \vec{x}]_2 &= \frac{1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi}{3} x + \frac{1+2\cos\varphi}{3} y + \frac{1-\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi}{3} z \\ [R(\vec{n}, \varphi) \vec{x}]_3 &= \frac{1-\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi}{3} x + \frac{1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi}{3} y + \frac{1+2\cos\varphi}{3} z \end{aligned} \quad (3.32)$$

Das heisst, eine solche Drehung lässt sich durch folgende 3×3 Matrix realisieren:

$$R(\vec{n}, \varphi) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2\cos\varphi & 1-\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi & 1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi \\ 1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi & 1+2\cos\varphi & 1-\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi \\ 1-\cos\varphi-\sqrt{3}\sin\varphi & 1-\cos\varphi+\sqrt{3}\sin\varphi & 1+2\cos\varphi \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

Machen wir noch einen Konsistenz-Check: Wir drehen ja um die $(1, 1, 1)$ -Achse. Es wird einen Drehwinkel geben, der \vec{e}_1 nach \vec{e}_2 , \vec{e}_2 nach \vec{e}_3 und \vec{e}_3 nach \vec{e}_1 dreht. Wenn wir diese Drehung 3 mal anwenden, wird \vec{e}_1 wieder nach \vec{e}_1 abgebildet, also der Drehwinkel einer solchen Drehung sollte genau 120° betragen. Schauen wir uns die entsprechende Matrix an: Wir haben

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \sqrt{3}/2 \quad (3.34)$$

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -1/2 \quad (3.35)$$

Also bekommen wir

$$R(\vec{n}, 120^\circ) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

und damit

$$R(\vec{n}, 120^\circ) \vec{e}_1 = \vec{e}_2, \quad R(\vec{n}, 120^\circ) \vec{e}_2 = \vec{e}_3, \quad R(\vec{n}, 120^\circ) \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \quad (3.37)$$

genau so, wie es sein soll. Das sieht also alles ok aus.

Zum Abschluss wollen wir noch eine Formel angeben, die es erlaubt, das $R(\vec{n}, \varphi)$ als Matrix-Exponential zu schreiben. Oder umgekehrt gesprochen, die es erlaubt, bestimmte Matrix-Exponentiale als Drehungen zu interpretieren:

Theorem: Es sei (siehe Aufgabe 3 vom Ü-Blatt 6)

$$L_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & +n_2 \\ +n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & +n_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

die Matrix-Darstellung für das Vektorprodukt, $L_{\vec{n}} \vec{x} = \vec{n} \times \vec{x}$. Dann gilt

$$e^{\varphi L_{\vec{n}}} = R(\vec{n}, \varphi) \quad (3.39)$$

Beweis: Ü-Blatt 7, Aufgabe 3 (nicht klausurrelevant) ■