3. Skalar-, Vektor- und Spatprodukt im $\mathbb{R}^3$

3.1 Definitionen

In diesem und dem nächsten Abschnitt wollen wir nicht zwischen der Zeilen- und Spalten-Schreibweise von Vektoren unterscheiden. Während bei der Operation 'Matrix angewendet auf Vektor' es wichtig ist, dass der Vektor ein Spaltenvektor ist, man kann dann etwa den Ausdruck $A\vec{x}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ auch als Matrix-Produkt einer $m \times n$ Matrix A mit einer $n \times 1$ Matrix $\vec{x}$ auffassen, werden wir in diesen und dem nächsten Abschnitt nur Vektoren haben und keine Matrizen, und aus Platzgründen werden wir dann gelegentlich auch schreiben

$$\vec{a} \;=\; (a_1, a_2, a_3) \;\in\; \mathbb{R}^3$$

anstatt der Spalten-Schreibweise

$$\vec{a} \;=\; \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^3$$

Wir beginnen mit dem Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$, wobei die Definition im $\mathbb{R}^n$ völlig analog ist. Für das Spatprodukt gibt es auch eine n-dimensionale Version, das sind dann die $n\times n$ Determinanten, die wir uns dann im nächsten Kapitel genauer anschauen werden. Schliesslich ist es ebenfalls möglich, mit Hilfe von Determinanten eine n-dimensionale Version eines Vektorproduktes zu definieren, da wird dann zu $n-1$ gegebenen Vektoren im $\mathbb{R}^n$ ein neuer Vektor konstruiert, der auf den gegebenen $n-1$ Vektoren senkrecht steht, das werden wir aber in dieser Veranstaltung nicht weiter betrachten.

Definition (Skalarprodukt): Es seien $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann ist das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b} \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \;:=\; a_1 b_1 \;+\; a_2 b_2 \;+\; a_3 b_3 \tag{3.1}$$

Anstatt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ werden auch die Schreibweisen $\vec{a}\,\vec{b}$, also ohne den Punkt, oder auch $(\vec{a},\vec{b})$ oder $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$ oder auch $(\vec{a},\vec{b})_{\mathbb{R}^n}$ verwendet. Die Länge eines Vektors $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ oder auch die Norm $\|\vec{a}\|$ von $\vec{a}$ ist dann gegeben durch die Grösse

$$\|\vec{a}\| \;:=\; \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}} \;=\; \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{3.2}$$

Anstatt der doppelten Striche wird gelegentlich auch nur ein Strich wie beim Betrag für reelle oder komplexe Zahlen benutzt, also die Schreibweise $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ist auch üblich.

Definition (Vektorprodukt): Es seien $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ zwei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann ist das Vektorprodukt $\vec{a}\times\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \;:=\; \begin{pmatrix} a_2 b_3 \;-\; a_3 b_2 \\ a_3 b_1 \;-\; a_1 b_3 \\ a_1 b_2 \;-\; a_2 b_1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Definition (Spatprodukt): Es seien $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ und $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann ist das Spatprodukt $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \in \mathbb{R}$ definiert durch

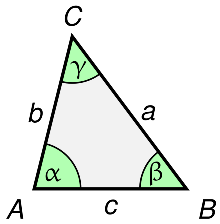
$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \;:=\; \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) \;\overset{\text{Ü-Blatt 6}}{=}\; (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \tag{3.4}$$

Da das Spatprodukt identisch ist mit einer 3×3 Determinante $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, machen wir dann im nächsten Kapitel, wird der Begriff 'Spatprodukt' und auch die Notation $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$ selten verwendet, sondern man schreibt dann gleich den direkten Ausdruck $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ oder die Determinante hin, ohne das Wort 'Spatprodukt' zu verwenden.

3.2 Geometrische Interpretationen

Skalarprodukt:

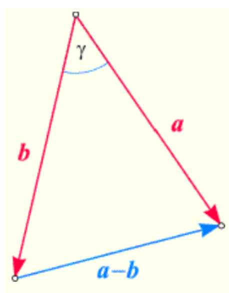
Wir beginnen mit dem Skalarprodukt und erinnern uns an den Kosinussatz aus der Schule: In einem beliebigen Dreieck mit Seiten a, b und c und Winkeln α, β und γ



gilt die Beziehung

$$c^2 \;=\; a^2 \,+\, b^2 \,-\, 2\,a\,b\,\cos\gamma \tag{3.5}$$

Wir wählen die Bezeichnungen jetzt folgendermassen: Der Punkt C sei der Koordinatenursprung in $\mathbb{R}^3$, $C = (0, 0, 0)$, und die Strecken von C nach A und von C nach B seien durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (oder $\vec{b}$ und $\vec{a}$..) gegeben:



(über dem a und dem b fehlen die Vektorpfeile..)

Die Seite c in dem Dreieck von oben ist dann also gegeben durch die Länge des Vektor $\vec{a} - \vec{b}$ oder $\vec{b} - \vec{a}$, wir bekommen mit $a = \|\vec{a}\|$ und $b = \|\vec{b}\|$:

$$\begin{aligned} c^2 \;&=\; \|\vec{a} - \vec{b}\|^2 \;=\; (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ &=\; \vec{a} \cdot \vec{a} \,+\, \vec{b} \cdot \vec{b} \,-\, \vec{a} \cdot \vec{b} \,-\, \vec{b} \cdot \vec{a} \\ &=\; a^2 \,+\, b^2 \,-\, 2\,\vec{a} \cdot \vec{b} \end{aligned} \tag{3.6}$$

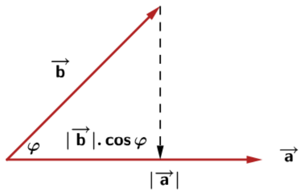
Nach dem Kosinussatz muss das aber übereinstimmen mit $a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma$,

$$c^2 \;=\; a^2 + b^2 - 2\,\vec{a}\cdot\vec{b} \;\overset{(3.5)}{=}\; a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\gamma \tag{3.7}$$

Also bekommen wir

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \;=\; a\,b\,\cos\gamma \;=\; \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\cos[\measuredangle(\vec{a},\vec{b})\,] \tag{3.8}$$

wobei $\gamma = \measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ der von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist. Und die Grösse $\|\vec{b}\|\,\cos\gamma$ ist gerade die Länge, die man bekommt, wenn man den Vektor $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$ projiziert, wie in dem folgenden Bild (mit φ anstatt γ, $\varphi = \gamma$):



Oder umgekehrt kann man auch sagen, $\|\vec{a}\|\,\cos\gamma$ ist gerade die Länge, die man bekommt, wenn man den Vektor $\vec{a}$ senkrecht auf den Vektor $\vec{b}$ projiziert.

Vektorprodukt:

Wir legen die beiden Vektoren in die (x, y)-Ebene und benutzen Polarkoordinaten, also

$$\vec{a} \;=\; a\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\\ 0\end{pmatrix}, \qquad \vec{b} \;=\; b\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\\ 0\end{pmatrix}$$

mit $a = \|\vec{a}\|$ und $b = \|\vec{b}\|$. Nach Definition des Vektorproduktes erhalten wir dann

$$\vec{a}\times\vec{b} \;=\; \begin{pmatrix}a_2\,b_3 \;-\; a_3\,b_2\\ a_3\,b_1 \;-\; a_1\,b_3\\ a_1\,b_2 \;-\; a_2\,b_1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}a_2\cdot 0 \;-\; 0\cdot b_2\\ 0\cdot b_1 \;-\; a_1\cdot 0\\ a_1\,b_2 \;-\; a_2\,b_1\end{pmatrix} \;=:\; \begin{pmatrix}0\\ 0\\ c_3\end{pmatrix}$$

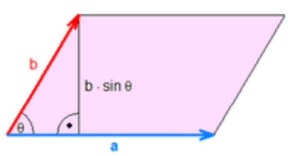
mit

$$c_3 \;=\; a_1\,b_2 \;-\; a_2\,b_1 \;=\; a\,b\,\big(\cos\alpha\sin\beta \;-\; \sin\alpha\cos\beta\big) \;=\; a\,b\,\sin(\beta-\alpha)$$

wobei wir in dem letzen Gleichheitszeichen das Additionstheorem

$$\sin(\varphi+\psi) \;=\; \sin\varphi\cos\psi \;+\; \sin\psi\cos\varphi$$

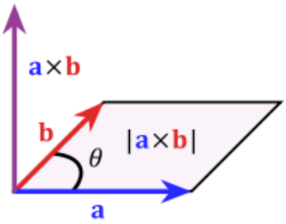
mit $\varphi = \beta$ und $\psi = -\alpha$ benutzt haben und die Identität $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ verwendet haben. Jetzt betrachten wir das folgende Bild mit $\theta := \beta - \alpha$, dieses θ ist dann also genau der Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:



Die Grösse $b \sin\theta = b \sin(\beta - \alpha)$ ist offensichtlich gerade die Höhe in dem rosanen Parallelogramm, also ist

$$\| \vec{a} \times \vec{b} \| \quad = \quad |c_3| \quad = \quad | \, a \, b \, \sin(\beta - \alpha) \, | \quad = \quad \text{Fläche Parallelogramm} \tag{3.9}$$

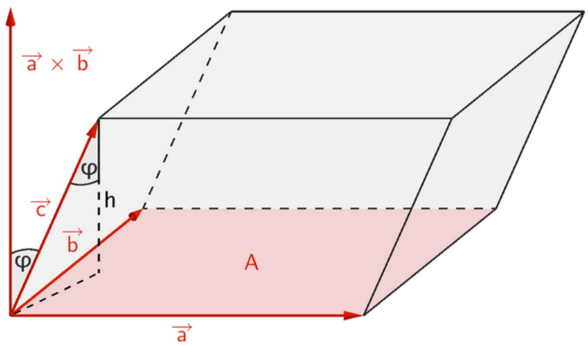
Das gilt dann auch für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ im $\mathbb{R}^3$, auch wenn sie nicht in der (x, y)-Ebene liegen, man bekommt das folgende Bild:



(über dem a und dem b fehlen die Vektorpfeile)

Spatprodukt:

Die geometrische Bedeutung des Spatproduktes ergibt sich jetzt unmittelbar aus dem folgenden Bild:



Von den drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ wird der graue Körper, ein Spat oder ein Parallelepiped, aufgespannt. Dessen Volumen ist gegeben durch Grundfläche A mal Höhe h. Die Grundfläche ist gerade die Fläche des Parallelogramms, welches von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird, also $A = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$. Und die Höhe h ist offensichtlich $\|\vec{c}\| \cos\varphi$ wobei φ der Winkel zwischen $\vec{c}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ ist. Also bekommen wir für das graue Volumen V :

$$V \quad = \quad A \cdot h \quad = \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cos\varphi \quad \overset{(3.8)}{=} \quad | \, (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \, | \tag{3.10}$$

Da etwa $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$ gilt, das Spatprodukt ist vorzeichenbehaftet, müssen wir ganz am Ende noch ein Betrag nehmen, wenn wir nur das positive Volumen haben wollen. In dem Zusammenhang wollen wir noch die folgende Definition festhalten:

Definition: Drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ im $\mathbb{R}^3$ bilden ein **Rechtssystem** genau dann, wenn ihr Spatprodukt positiv ist,

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \quad = \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad > \quad 0 \tag{3.11}$$

Offensichtlich bilden dann die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ immer ein Rechtssystem, da

$$[\, \vec{a} \, , \, \vec{b} \, , \, \vec{a} \times \vec{b} \,] \quad = \quad (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \quad = \quad \| \, \vec{a} \times \vec{b} \, \|^2 \quad > \quad 0 \tag{3.12}$$

falls $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$.