2.4 Harmonische Schwingungen und das Matrix-Exponential

Erinnern wir uns an die Differentialgleichung für den gedämpften (oder ungedämpften für $\gamma = 0$) harmonischen Oszillator. Sie war gegeben durch

$$x''(t) \; + \; \gamma \, x'(t) \; + \; \varepsilon^2 \, x(t) \;\; = \;\; 0 \tag{2.35}$$

Wir wollen die Geschwindigkeit $v = v(t) = x'(t)$ als eigenständige Variable auffassen und schreiben die zweite Ableitung $x''(t)$ als erste Ableitung von v,

$$v(t) \; := \; x'(t) \qquad \Rightarrow \qquad v'(t) \; = \; x''(t) \tag{2.36}$$

Wir können dann schreiben

$$x''(t) \; + \; \gamma \, x'(t) \; + \; \varepsilon^2 \, x(t) \;\; = \;\; v'(t) \; + \; \gamma \, v(t) \; + \; \varepsilon^2 \, x(t) \;\; = \;\; 0 \tag{2.37}$$

und die ursprüngliche Differentialgleichung (2.35) zweiter Ordnung ist dann äquivalent zum System erster Ordnung

$$\begin{aligned} x'(t) \;\; &= \;\; v(t) \\ v'(t) \;\; &= \;\; -\gamma \, v(t) \; - \; \varepsilon^2 \, x(t) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Das können wir jetzt wie folgt in Vektor-Matrix Notation schreiben:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \;\; = \;\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \tag{2.39}$$

Definieren wir dann den 2-komponentigen Vektor

$$\vec{y}(t) \;\; := \;\; \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \tag{2.40}$$

mit Ableitung

$$\begin{aligned} \vec{y}\,'(t) \;\; &= \;\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{y}(t+\Delta t) - \vec{y}(t)}{\Delta t} \;\; = \;\; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\begin{pmatrix} x(t+\Delta t) \\ v(t+\Delta t) \end{pmatrix} \; - \; \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \right] \\ &= \;\; \lim_{\Delta t \to 0} \begin{pmatrix} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \\ \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \end{pmatrix} \;\; = \;\; \begin{pmatrix} x'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} \;\; \overset{\text{Notation}}{=} \;\; \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} (t) \end{aligned} \tag{2.41}$$

dann ist das System (2.39) äquivalent zur DGL

$$\vec{y}\,'(t) \;\; = \;\; A \, \vec{y}(t) \tag{2.42}$$

mit der 2×2 Matrix

$$A \;\; = \;\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\gamma \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

Genauso wie wir bereits die komplexe DGL (mit $\lambda \in \mathbb{C}$)

$$z'(t) \;=\; \lambda\, z(t)$$

mit dem komplexen Exponential $z(t) = e^{\lambda t} z_0$ gelöst haben, können wir jetzt auch die DGL (2.42) mit der Exponentialfunktion lösen, mit einem Matrix-Exponential, es gilt das folgende

Theorem: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige konstante (d.h. nicht von der Zeit t abhängige) Matrix und $\vec{y} = \vec{y}(t) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt: Die Differentialgleichung

$$\vec{y}\,'(t) \;=\; A\,\vec{y}(t)$$

wird gelöst von

$$\vec{y}(t) \;=\; e^{tA}\,\vec{y}_0 \tag{2.44}$$

mit $\vec{y}_0 := \vec{y}(t=0)$. Dabei ist das Matrix-Exponential e^{tA} oder e^A definiert durch die Potenzreihenentwicklung der e-Funktion,

$$e^A \;:=\; Id \;+\; A \;+\; \frac{1}{2!}\,A^2 \;+\; \frac{1}{3!}\,A^3 \;+\; \cdots \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} \tag{2.45}$$

wobei $Id \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die $n \times n$ Einheitsmatrix gegeben durch (2.31) ist.

Beweis: Wir können fast wortwörtlich den Beweis der komplexen Version, das war (1.73) aus dem Kapitel 1.6, abschreiben, wir müssen nur das komplexe λ durch die Matrix A ersetzen: Es ist

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}\, e^{At} \;&=\; \tfrac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{A^n\, t^n}{n!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} A^n\, \tfrac{d}{dt}\, \tfrac{t^n}{n!} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A^n\, \tfrac{n\, t^{n-1}}{n!} \\
&=\; \sum_{n=1}^{\infty} A^n\, \tfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \;=\; A \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{(At)^{n-1}}{(n-1)!} \;=\; A \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(At)^n}{n!} \;=\; A\, e^{At}
\end{aligned}$$

Mit $\vec{y}(t) := e^{At}\,\vec{y}_0$ bekommen wir dann

$$\vec{y}\,'(t) \;=\; \tfrac{d\vec{y}}{dt} \;=\; \tfrac{d}{dt}\, e^{At}\,\vec{y}_0 \;=\; A\, e^{At}\,\vec{y}_0 \;=\; A\,\vec{y}(t)$$

und das Theorem ist bewiesen. ■

Das System (2.39) für den gedämpften harmonischen Oszillator (wir schreiben wieder $\gamma = 2\mu$)

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}$$

wird also gelöst von

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}(t) \;=\; \exp\Bigg[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} t\Bigg]\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

Wie kann man nun das Matrix-Exponential e^{At} konkret berechnen? Eine Methode besteht darin, die Matrix A zu diagonalisieren, das werden wir uns auf dem neuen Übungsblatt genauer anschauen. Das ist eine systematische Methode, die immer funktioniert, sofern die gegebene Matrix A denn diagonalisierbar ist. Manchmal, wie hier jetzt, ist es aber auch so, dass die gegebene Matrix A noch hinreichend einfach ist, so dass man die Potenzreihenentwicklung explizit aufsummieren kann. Um das hier jetzt machen zu können, benötigen wir noch den folgenden

Hilfssatz: Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zwei beliebige $n \times n$ Matrizen und es gelte

$$AB \;=\; BA \tag{2.47}$$

Dann gilt:

$$e^{A+B} \;=\; e^A\, e^B \tag{2.48}$$

Bemerkung: Der Standard-Fall bei Matrizen ist typischerweise, dass die Voraussetzung (2.47) nicht erfüllt ist, so dass dann auch die Gleichung (2.48) nicht richtig ist.

Beweis: geht wortwörtlich wie der Beweis für die komplexe Version $e^{z+w} = e^z e^w$, das war Gleichung (1.43) im Kapitel 1.4, wobei die komplexen Zahlen z und w jetzt durch die Matrizen A und B zu ersetzen sind. Die Voraussetzung $AB = BA$ braucht man, um die binomische Formel (1.46) für $(a + b)^n$ auch auf Matrizen $(A + B)^n$ anwenden zu können. ■

Damit können wir jetzt das Matrix-Exponential in (2.46) berechnen:

Satz: Mit $\omega := \sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2}$ gilt die folgende Formel:

$$\exp\left\{ t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} \right\} \;=\; e^{-\mu t}\left[\cos\omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\omega t}{\omega}\begin{pmatrix} +\mu & +1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix}\right] \tag{2.49}$$

Beweis: Wir schreiben

$$\begin{aligned}
\exp\left\{ t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & -2\mu \end{pmatrix} \right\} \;&=\; \exp\left\{ t\begin{pmatrix} -\mu & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\} \\
&=\; \exp\left\{ -\mu\, t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\} \\
&\overset{(2.48)}{=}\; \exp\left\{ -\mu\, t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \exp\left\{ t\begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\} \\
&=\; e^{-\mu t}\, Id \cdot \exp\left\{ t\begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Weiterhin bekommen wir mit

$$A \;:=\; \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix}$$

die folgenden Potenzen:

$$A^2 \;=\; \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\mu & 1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \mu^2 - \varepsilon^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 - \varepsilon^2 \end{pmatrix} \;=\; -\,\omega^2\, Id$$

und damit

$$A^{2k} \;=\; (\,A^2\,)^k \;=\; (-1)^k\, \omega^{2k}\, Id \tag{2.50}$$

$$A^{2k+1} \;=\; A^{2k} \cdot A \;\overset{(2.50)}{=}\; (-1)^k\, \omega^{2k}\, A \;=\; (-1)^k\, \omega^{2k+1}\, \frac{A}{\omega} \tag{2.51}$$

Mit den Potenzreihenentwicklungen für exp, cos und sin aus dem week2 bekommen wir dann:

$$\begin{aligned} e^{tA} \;\overset{(1.39)}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(tA)^n}{n!} \;&=\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(tA)^{2k}}{(2k)!} \;+\; \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{(tA)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &\overset{\substack{(2.50)\\(2.51)}}{=}\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{(t\omega)^{2k}}{(2k)!}\, Id \;+\; \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{(t\omega)^{2k+1}}{(2k+1)!}\, \tfrac{A}{\omega} \\ &\overset{\substack{(1.40)\\(1.41)}}{=}\; \cos(\omega t)\, Id \;+\; \frac{\sin(\omega t)}{\omega}\, A \\ &=\; \cos\omega t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;+\; \frac{\sin\omega t}{\omega} \begin{pmatrix} +\mu & +1 \\ -\varepsilon^2 & -\mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit ist die Formel bewiesen. ■

Als Lösung für den gedämpften harmonischen Oszillator bekommen wir dann also

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} \;=\; e^{-\mu t} \begin{pmatrix} \cos\omega t \,+\, \frac{\mu}{\omega}\, \sin\omega t & \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ -\varepsilon^2\, \frac{\sin\omega t}{\omega} & \cos\omega t \,-\, \frac{\mu}{\omega}\, \sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

Uns interessiert die Auslenkung $x(t)$, das ist dann die erste Koordinate davon, und wir erhalten

$$\begin{aligned} x(t) \;&=\; e^{-\mu t} \left[\left(\cos\omega t \,+\, \tfrac{\mu}{\omega}\, \sin\omega \right) x_0 \;+\; \tfrac{\sin\omega t}{\omega}\, v_0 \right] \\ &=\; e^{-\mu t} \left[x_0\, \cos\omega t \;+\; \tfrac{v_0 + \mu x_0}{\omega}\, \sin\omega t \right] \end{aligned} \tag{2.53}$$

und das stimmt exakt mit dem Resultat (1.81) aus Kapitel 1.6 überein.