

2. Vektoren und Matrizen im \mathbb{R}^n

2.1 Grundlegende Definitionen

Die Menge der n -dimensionalen reellen Vektoren im \mathbb{R}^n ist gegeben durch

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.1)$$

versehen mit den Rechenoperationen ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$\lambda \cdot \vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

Analog definiert man den n -dimensionalen Raum der komplexen Vektoren durch

$$\mathbb{C}^n := \left\{ \vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mid z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C} \right\} \quad (2.2)$$

Die folgenden Begriffe werden im gesamten weiteren Verlauf der Veranstaltung benötigt werden:

Definition (Linearkombinationen, lineare Abhängigkeit, Basis):

a) Es seien $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Ein Ausdruck der Form

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m = \sum_{k=1}^m \lambda_k \vec{x}_k \quad (2.3)$$

heißt eine **Linearkombination** der $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m$.

b) m Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen **linear unabhängig**, falls sich keiner der Vektoren als eine Linearkombination der anderen $m - 1$ Vektoren darstellen lässt. Falls das doch möglich ist, heißen die Vektoren **linear abhängig**. Eine mathematisch äquivalente Beschreibung ist: m Vektoren $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_m \vec{x}_m \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.4)$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ besitzt.

c) n linear unabhängige Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ im \mathbb{R}^n bilden eine **Basis** des \mathbb{R}^n . Man kann dann jeden Vektor \vec{x} des \mathbb{R}^n als eine eindeutige Linearkombination der $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ schreiben,

$$\vec{x} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \lambda_n \vec{v}_n \quad (2.5)$$

Wie man die λ_k etwa konkret berechnen kann, werden wir uns dann noch anschauen.

d) Die **Standardbasis** des \mathbb{R}^n ist gegeben durch die n Standardbasisvektoren

$$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Eine etwas kompaktere Notation lässt sich mit Hilfe des ‘**Kronecker-Deltas**’

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases} \quad (2.7)$$

erreichen, man könnte dann etwa schreiben

$$\vec{e}_k := (\delta_{i,k})_{i=1}^n, \quad (2.8)$$

an der k -ten Stelle steht also eine 1 und der Rest sind alles Nullen.

Wir können dann ein beliebiges $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ wie folgt als Linearkombination der Standardbasisvektoren schreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder etwas kompakter

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n = \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k \quad (2.9)$$

2.2 Matrizen und lineare Abbildungen

Der Begriff der linearen Abbildung ist fundamental für die lineare Algebra:

Definition (lineare Abbildung): Eine Abbildung (oder Transformation, deshalb das ‘ T ’)

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

heisst linear, falls für beliebige $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$T(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda T\vec{x} + \mu T\vec{y} \quad (2.10)$$

Jeder linearen Abbildung T lässt sich folgendermassen eine $m \times n$ Matrix zuordnen: Wir schreiben ein beliebiges $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ als Linearkombination der Standardbasisvektoren $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ wie in (2.9):

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

Wegen der Linearität von T können wir dann schreiben:

$$\begin{aligned} T \vec{x} &= T(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \cdots + x_n \vec{e}_n) \\ &= x_1 T \vec{e}_1 + x_2 T \vec{e}_2 + \cdots + x_n T \vec{e}_n, \end{aligned} \quad (2.11)$$

jede lineare Abbildung ist durch die Bilder der Basisvektoren eindeutig festgelegt. Bezeichnen wir jetzt die Bilder der Basisvektoren $T \vec{e}_j$ mit \vec{a}_j ,

$$T \vec{e}_1 =: \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \quad \cdots \quad T \vec{e}_n =: \vec{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

dann können wir also schreiben

$$T \vec{x} = \vec{a}_1 x_1 + \cdots + \vec{a}_n x_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,n} x_n \\ \vdots \\ a_{m,1} x_1 + \cdots + a_{m,n} x_n \end{pmatrix} =: A \vec{x} \quad (2.13)$$

mit der $m \times n$ Matrix

$$A := \left(\begin{array}{c|ccc|c} & & & & \\ & \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & \\ & | & & | & \\ & & & & \end{array} \right) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (2.14)$$

Dabei ist die Operation einer $m \times n$ Matrix A gegeben durch (2.14) auf einen Vektor \vec{x} dann also genau definiert durch die Formel (2.13),

$$A \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} x_1 + \cdots + a_{1,n} x_n \\ \vdots \\ a_{m,1} x_1 + \cdots + a_{m,n} x_n \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Beispiel: Die komplexe Multiplikation als lineare Abbildung im \mathbb{R}^2

Wir hatten im Kapitel 1 gesehen, dass die komplexen Zahlen Punkte in der (x, y) -Ebene sind, also Punkte im \mathbb{R}^2 , und weiterhin hatten wir uns im Kapitel 1.2 klargemacht, dass die Multiplikation einer komplexen Zahl $z = x + iy = r e^{i\varphi}$ mit einer anderen komplexen Zahl $w = a + ib = \rho e^{i\alpha}$ durch

$$\begin{aligned} w \cdot z &= (a, b) \cdot (x, y) \stackrel{(1.10)}{=} (ax - by, ay + bx) \\ &= \rho e^{i\alpha} \cdot r e^{i\varphi} = \rho r e^{i(\alpha+\varphi)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

gegeben ist, die Radien werden multipliziert und die Winkel werden addiert. Wenn wir jetzt das $w = a + ib$ festhalten und das $z = x + iy$ variieren lassen, dann können wir die Operation

$$(x, y) \rightarrow (ax - by, ay + bx) \quad (2.17)$$

als eine lineare Abbildung

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (2.18)$$

auffassen. Schreiben wir dann noch $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ als Spaltenvektor anstatt als Zeilenvektor (x, y) , dann sieht das T also folgendermassen aus:

$$T \vec{x} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by \\ ay + bx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Die Matrixdarstellung der Abbildung T , der komplexen Multiplikation, ist also gegeben durch die 2×2 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Wir können auch die Variablen ρ und α der Polar-Darstellung

$$w = a + ib = \rho e^{i\alpha}, \quad \rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\rho}, \quad \cos \alpha = \frac{a}{\rho} \quad (2.21)$$

benutzen und das A dann wie folgt schreiben:

$$A = \rho \begin{pmatrix} \frac{a}{\rho} & -\frac{b}{\rho} \\ \frac{b}{\rho} & \frac{a}{\rho} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

So eine Matrix beschreibt dann offensichtlich eine Drehung mit Winkel α gefolgt von einer Streckung mit dem Faktor ρ .

2.3 Das Produkt von zwei Matrizen

Wir haben gesehen, dass jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch eine $m \times n$ Matrix dargestellt werden kann und umgekehrt tut jede $m \times n$ Matrix durch die Zuordnung $\mathbb{R}^n \ni \vec{x} \rightarrow A \vec{x} \in \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung definieren. Wir können also sagen, lineare Abbildungen und Matrizen sind im wesentlichen dasselbe. Nehmen wir jetzt an, wir haben zwei lineare Abbildungen T_A und T_B mit den Matrix-Darstellungen A und B gegeben. Die Dimensionen seien wie folgt:

$$\begin{aligned} T_A & : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, & A & \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ T_B & : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^\ell, & B & \in \mathbb{R}^{\ell \times m} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Dann können wir das T_A in das T_B einsetzen und die Abbildung ('Hintereinanderschaltung')

$$\begin{aligned} T_B \circ T_A & : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell \\ \vec{x} \rightarrow (T_B \circ T_A)(\vec{x}) & := T_B(T_A \vec{x}) \end{aligned} \quad (2.24)$$

betrachten. Das ist dann wieder eine lineare Abbildung T_C , die dann durch eine $\ell \times n$ Matrix C realisiert werden kann, und dieses C ist dann das Matrix-Produkt von B und A ,

$$C = BA, \quad T_C := T_B T_A \quad (2.25)$$

Wie sieht jetzt die konkrete Rechenvorschrift zur Berechnung des C aus, wenn A und B gegeben sind? Erinnern uns an die Gleichungen (2.12) aus dem letzten Abschnitt, in den Spalten von T_C stehen die Bilder der Basisvektoren:

$$C = \left(\begin{array}{c|ccc|} \vec{c}_1 & \cdots & \vec{c}_n & \\ \hline \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|ccc|} T_C \vec{e}_1 & \cdots & T_C \vec{e}_n & \\ \hline \end{array} \right) \quad (2.26)$$

In unserem Fall haben wir

$$T_C \vec{e}_j \stackrel{\text{Def. von } T_C}{=} T_B (T_A \vec{e}_j) \stackrel{(2.12)}{=} T_B \vec{a}_j \stackrel{(2.13)}{=} B \vec{a}_j \quad (2.27)$$

Also,

$$C = BA = \left(\begin{array}{c|ccc|} B \vec{a}_1 & \cdots & B \vec{a}_n & \\ \hline \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{\ell \times n} \quad (2.28)$$

wobei die Operation Matrix angewendet auf Vektor durch (2.15) gegeben ist. Fassen wir die Resultate in dem folgendem Theorem zusammen:

Theorem: Gegeben seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{\ell \times m}$. Dann ist das Matrix-Produkt $C = BA$, welches zu der linearen Abbildung $T_C := T_B T_A$ gehört, gegeben durch die $\ell \times n$ Matrix

$$C = (c_{i,k})_{\substack{i=1,\dots,\ell \\ k=1,\dots,n}} \in \mathbb{R}^{\ell \times n} \quad (2.29)$$

mit den Matrix-Einträgen

$$c_{i,k} = b_{i,1} a_{1,k} + \cdots + b_{i,m} a_{m,k} = \sum_{j=1}^m b_{i,j} a_{j,k} . \quad (2.30)$$

Dazu vielleicht noch eine Visualisierung, wobei das Bild offensichtlich ein Produkt AB visualisiert, nicht BA :

**Falksches Schema
für die
Matrixmultiplikation**

$$A B = C$$

Das Matrixelement c_{32} entsteht aus dem Skalarprodukt der 3. Zeile von A und der 2. Spalte von B :
 $(-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 + (-2) \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) = -5$

Beim Rechnen mit reellen oder komplexen Zahlen spielt die Zahl 1 eine besondere Rolle, es ist $1 \cdot z = z \cdot 1 = z$ für beliebige reelle oder komplexe Zahlen z . Ferner wird $1/z = z^{-1}$ als der Kehrwert oder das Inverse von z bezeichnet. Diese Begriffe überträgt man auch auf Matrizen: Die Matrix

$$Id := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (2.31)$$

heisst die Einheitsmatrix oder die Identitätsmatrix, sie hat also n Einsen auf der Hauptdiagonalen und sonst alles Nullen. Man überlegt sich leicht, dass dann

$$Id A = A Id = A \quad (2.32)$$

gilt für beliebigen $n \times n$ Matrizen A . Und eine Matrix B mit

$$B A = A B = Id \quad (2.33)$$

wird dann als das Inverse von A bezeichnet und man schreibt

$$B = A^{-1} \quad (2.34)$$

Dabei gilt das folgende Theorem, welches wir auf dem neuen Übungsblatt an einem Beispiel überprüfen werden:

Theorem: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine quadratische $n \times n$ Matrix. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Es sei $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (' L ' für 'Links inverses') eine Matrix mit

$$L A = Id$$

Dann gilt automatisch auch

$$A L = Id$$

so dass $L = A^{-1}$.

b) Es sei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (' R ' für 'Rechts inverses') eine Matrix mit

$$A R = Id$$

Dann gilt automatisch auch

$$R A = Id$$

so dass $R = A^{-1}$.