

1.5 Die n-ten Einheitswurzeln

Wir wollen alle komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^n = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z^n - 1 = 0 \quad (1.47)$$

bestimmen. Machen wir das mal für $n = 4$. Wir schreiben

$$z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i) \stackrel{!}{=} 0 \quad (1.48)$$

und bekommen die Lösungen

$$z_1 = +1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = +i, \quad z_4 = -i \quad (1.49)$$

Wir haben also insgesamt 4 Lösungen. Das ist kein Zufall, die Gleichung $z^n = 1$ hat im Komplexen genau n verschiedene Lösungen. Wie können wir die jetzt etwas systematischer bestimmen? Wir erinnern uns an den Zusammenhang zwischen Bogenmass und Grad, 2π entsprechen 360 Grad. Insbesondere gilt

$$\sin 2\pi = 0, \quad \cos 2\pi = 1 \quad (1.50)$$

und da die Funktionen 2π -periodisch sind, gilt auch

$$\begin{aligned} \sin 0 &= \sin 2\pi = \sin 4\pi = \sin 6\pi = \dots = \sin(2\pi \cdot k) = 0 \\ \cos 0 &= \cos 2\pi = \cos 4\pi = \cos 6\pi = \dots = \cos(2\pi \cdot k) = 1 \end{aligned} \quad (1.51)$$

und damit

$$e^{2\pi k i} = \cos(2\pi \cdot k) + i \sin(2\pi \cdot k) = 1 \quad (1.52)$$

für beliebige natürliche oder ganze Zahlen $k \in \mathbb{Z}$. Zum Lösen der Gleichung $z^n = 1$ machen wir jetzt den Ansatz

$$z = r e^{i\varphi} \quad (1.53)$$

Wir bekommen:

$$z^n = r^n (e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} \stackrel{!}{=} 1 \quad (1.54)$$

Der Radius r muss auf jeden Fall 1 sein,

$$r = 1 \quad (1.55)$$

Welche Winkel φ kommen in Frage? Dazu benutzen wir jetzt (1.52) und schreiben

$$\begin{aligned} z^n \stackrel{r=1}{=} e^{in\varphi} &= 1 \stackrel{(1.52)}{=} e^{2\pi k i} \\ \Rightarrow n\varphi &= 2\pi k \end{aligned} \quad (1.56)$$

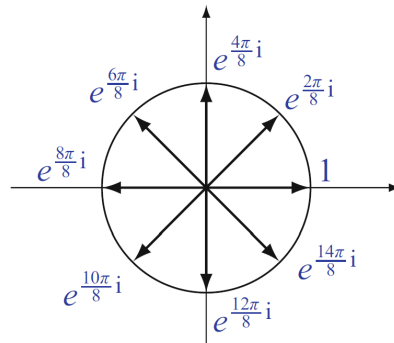
und damit $\varphi = 2\pi k/n$. Zum Beispiel liefert jetzt etwa der Winkel 10 Grad dieselbe komplexe Zahl wie der Winkel 370 Grad, also wenn wir wirklich verschiedene komplexe Zahlen bekommen wollen, dürfen wir nur die Winkel zwischen 0 und 360 Grad nehmen. Also

$$\varphi = 2\pi \frac{k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.57)$$

und alle Lösungen von $z^n = 1$ sind gegeben durch

$$z_k = e^{i2\pi \frac{k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (1.58)$$

Für $n = 8$ etwa bekommt man also 8 verschiedene Lösungen, die dann folgendermaßen aussehen:



Weiterhin kann man nachrechnen, für $n = 3$ machen wir das in den Übungen, aber für beliebiges n ist das schon nicht mehr ganz so offensichtlich, dass man wie in (1.48) den Ausdruck $z^n - 1$ faktorisieren kann, es gilt

$$z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - z_k) \quad (1.59)$$

mit den z_k gegeben durch (1.58). Das ist nun ein Spezialfall des folgenden

Theorem (Fundamentalsatz der Algebra): Gegeben sei das komplexe Polynom n -ten Grades

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$. Dann gibt es komplexe Zahlen $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (die nicht alle verschieden sein müssen), so dass

$$p(z) = (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot \dots \cdot (z - z_n)$$

Die z_1, \dots, z_n sind dann offensichtlich die Nullstellen von $p(z)$.

Beweis: ohne Beweis. ■

1.6 Harmonische Schwingungen und komplexe Zahlen

Wir betrachten ein Feder-Schwere-Pendel mit Federkonstanten D und Probemasse m . Ist die Ruhelage bei $x = 0$, dann ist die Rückstellkraft der Feder gegeben durch $F = -Dx$. Aus der Grundgleichung der Mechanik, Kraft gleich Masse mal Beschleunigung oder $F = ma$ folgt dann

$$F = ma = -Dx \quad (1.60)$$

mit der Beschleunigung a und Geschwindigkeit v gegeben durch

$$a = \frac{dv}{dt} = v'(t), \quad v = \frac{dx}{dt} = x'(t) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = x''(t) \quad (1.61)$$

Die Bewegungsgleichung lautet also

$$m x''(t) = -D x(t) \quad (1.62)$$

oder

$$x''(t) + \varepsilon^2 x(t) = 0 \quad (1.63)$$

mit $\varepsilon^2 := D/m$. Diese Differentialgleichung ist noch hinreichend einfach, dass man die Lösungen relativ leicht raten kann, die Funktionen $\sin \varepsilon t$ und $\cos \varepsilon t$ sind Lösungen von (1.63). Wenn man das Feder-Schwere-Pendel etwa in ein Wasserglas stellt, hat man noch Reibungskräfte, und die sind typischerweise proportional zur Geschwindigkeit:

$$F_{\text{Reibung}} = -K v = -K x'(t) \quad (1.64)$$

Die DGL (1.63) ändert sich dann zu

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \varepsilon^2 x(t) = 0 \quad (1.65)$$

mit $\gamma := K/m$. Jetzt ist es nicht mehr so einfach, eine Lösung zu raten, und mit Hilfe von komplexen Zahlen kann man in systematischer Weise Lösungen konstruieren. Dazu erweitern wir die reelle Funktion $x(t)$ zu einer komplexen Funktion

$$z(t) := x(t) + i y(t) \quad (1.66)$$

und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} z'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) + i y(t + \Delta t) - [x(t) + i y(t)]}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} + i \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} = x'(t) + i y'(t) \end{aligned} \quad (1.67)$$

und ebenso

$$z''(t) = x''(t) + i y''(t) \quad (1.68)$$

Nehmen wir jetzt an, wir hätten eine Lösung der komplexen DGL

$$z''(t) + \gamma z'(t) + \varepsilon^2 z(t) = 0 \quad (1.69)$$

gefunden. Wegen

$$\begin{aligned} 0 &= z'' + \gamma z' + \varepsilon^2 z \\ &= x'' + i y'' + \gamma (x' + i y') + \varepsilon^2 (x + i y) \\ &= x'' + \gamma x' + \varepsilon^2 x + i \left[y'' + \gamma y' + \varepsilon^2 y \right] \end{aligned} \quad (1.70)$$

sind dann auch

$$x(t) = \operatorname{Re}[z(t)], \quad y(t) = \operatorname{Im}[z(t)] \quad (1.71)$$

Lösungen der reellen DGL (1.65). Um die komplexe DGL (1.69) zu lösen, machen wir jetzt den Ansatz

$$z(t) = e^{\lambda t} \quad (1.72)$$

mit einem komplexen $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir wollen uns zunächst überlegen, dass wir auch bei komplexen λ die Ableitung nach t wie üblich berechnen können:

Hilfssatz: Gegeben sei die Funktion $z(t) := e^{\lambda t}$ mit einem komplexen $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$z'(t) = \lambda e^{\lambda t} \quad (1.73)$$

Beweis: Mit der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion bekommen wir

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{d}{dt} z(t) = \frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \frac{d}{dt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{d}{dt} \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{n t^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \lambda e^{\lambda t} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt den Ansatz (1.72) in die DGL (1.69) ein, bekommen wir

$$\begin{aligned} (\lambda^2 + \gamma \lambda + \varepsilon^2) e^{\lambda t} &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 + \gamma \lambda + \varepsilon^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.74)$$

Das ist eine quadratische Gleichung für λ die wir mit der üblichen p, q -Formel auflösen können:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \varepsilon^2} \quad (1.75)$$

Wir kürzen ab $\mu := \gamma/2$ und betrachten den Fall kleiner Reibung

$$\gamma/2 =: \mu < \varepsilon \quad (1.76)$$

das beinhaltet insbesondere auch den Fall $\gamma = \mu = 0$ ganz ohne Reibung. Die $\lambda_{1,2}$ können wir dann schreiben als

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \varepsilon^2} = -\mu \pm \sqrt{-(\varepsilon^2 - \mu^2)} = -\mu \pm i \sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2} \\ &=: -\mu \pm i \omega \end{aligned} \quad (1.77)$$

mit $\omega := \sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2}$ und wir bekommen die komplexen Lösungen

$$z_{1,2}(t) = e^{\lambda_{1,2} t} = e^{-\mu t \pm i \omega t} = e^{-\mu t} e^{\pm i \omega t} = e^{-\mu t} [\cos \omega t \pm i \sin \omega t] \quad (1.78)$$

Wegen (1.70) wissen wir, dass der Realteil als auch der Imaginärteil Lösungen von (1.65) sein müssen. Also bekommen wir die reellen Lösungen

$$x_1(t) = e^{-\mu t} \cos \omega t, \quad x_2(t) = e^{-\mu t} \sin \omega t \quad (1.79)$$

und die allgemeine Lösung von (1.65) ist dann gegeben durch

$$x(t) = e^{-\mu t} \{ A \cos \omega t + B \sin \omega t \} \quad (1.80)$$

wobei die Konstanten A und B durch die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $x'(0) = v_0$ festgelegt werden können. Fassen wir die Ergebnisse in einem Theorem zusammen:

Theorem (gedämpfter harmonischer Oszillator): Die Differentialgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator

$$x''(t) + \gamma x'(t) + \varepsilon^2 x(t) = 0$$

mit Anfangsbedingungen $x(t=0) = x_0$ und $x'(t=0) = v_0$ wird, im Fall kleiner Reibung $\gamma < 2\varepsilon$, gelöst von

$$x(t) = e^{-\mu t} \left\{ x_0 \cos \omega t + \frac{v_0 + \mu x_0}{\omega} \sin \omega t \right\} \quad (1.81)$$

mit $\mu := \gamma/2$ und $\omega := \sqrt{\varepsilon^2 - \mu^2}$.