

1.3 Potenzreihenentwicklungen von sin, cos und exp

Zur Herleitung der Euler'schen Formel $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ benötigen wir die Potenzreihenentwicklungen von sin, cos und exp. Diese Potenzreihenentwicklungen werden generell in den Ingenieur- und Naturwissenschaften sehr häufig benutzt. Man bekommt sie aus dem folgenden Theorem, welches unter dem Namen 'Satz von Taylor' bekannt ist. Die Taylor-Entwicklung einer Funktion ist eines der am meisten benutzten Resultate der Analysis überhaupt:

Theorem (Satz von Taylor): Es sei $f = f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare reelle Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ sei ein fest vorgegebener Entwicklungspunkt. Dann gilt unter milden¹ technischen Voraussetzungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \end{aligned} \quad (1.27)$$

Dabei bezeichnet $f^{(k)}(x_0)$ die k -te Ableitung von f an der Stelle x_0 und der Ausdruck $k!$, gesprochen k -Fakultät, ist gegeben durch

$$k! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \quad (1.28)$$

Dabei gelten die Konventionen $f^{(0)}(x) := f(x)$ und $0! := 1$.

Beweis: Obwohl das Theorem sehr wichtig ist, es wird sehr häufig benutzt, ist die Herleitung dieser Formel nicht besonders schwierig, man braucht nur die Formel für partielle Integration, tun wir uns eben an diese Formel erinnern: Nach der Produktregel zum Ableiten eines Produktes $g \cdot h$ zweier Funktionen $g = g(t)$ und $h = h(t)$ gilt

$$(g \cdot h)'(t) = g'(t)h(t) + g(t)h'(t)$$

Wir integrieren das von x_0 bis x und bekommen

$$(g \cdot h)(x) - (g \cdot h)(x_0) = \int_{x_0}^x (g \cdot h)'(t) dt = \int_{x_0}^x g'(t)h(t) dt + \int_{x_0}^x g(t)h'(t) dt$$

oder

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x g(t)h'(t) dt &= (g \cdot h)(x) - (g \cdot h)(x_0) - \int_{x_0}^x g'(t)h(t) dt \\ &= (g \cdot h)(t) \Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x g'(t)h(t) dt \end{aligned} \quad (1.29)$$

Um jetzt die Taylorformel herzuleiten, fangen wir so an:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) \cdot 1 dt \quad (1.30)$$

Auf das Integral auf der rechten Seite von (1.30) wenden wir nun die Formel (1.29) an mit

$$\begin{aligned} g(t) &:= f'(t) \\ h'(t) &:= 1 \end{aligned}$$

¹der Ausdruck $R_n := \int_{x_0}^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$ muss für $n \rightarrow \infty$ nach 0 konvergieren, für sin, cos und exp ist das der Fall

Wenn $h'(t) = 1$ sein soll, können wir $h(t) = t$ nehmen. Genauso gut könnten wir aber auch $h(t) = t - 1$ oder $h(t) = t + 2$ oder allgemein, $h(t) = t + c$ mit einer Konstanten c wählen, Konstanten werden ja beim Ableiten zu Null. Um die Taylorformel herzuleiten, ist es jetzt günstig,

$$h(t) = t - x$$

zu wählen. In $h'(t)$ wird ja nach t abgeleitet, nicht nach x , deshalb kann man das x wie eine 2 oder ein c als eine Konstante ansehen. Wenn wir das in (1.29) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f'(t) \cdot 1 dt &= [f'(t) \cdot (t - x)]_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x f''(t) (t - x) dt \\ &= 0 - f'(x_0) \cdot (x_0 - x) - \int_{x_0}^x f''(t) (t - x) dt \\ &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t) (x - t) dt \end{aligned} \quad (1.31)$$

Das setzen wir in (1.30) ein und bekommen

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) \cdot 1 dt \\ &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t) (x - t) dt \end{aligned} \quad (1.32)$$

Machen wir noch eine weitere Iteration. Auf das Integral auf der rechten Seite von (1.32) wenden wir wieder die Formel (1.29) an, jetzt mit

$$\begin{aligned} g(t) &:= f''(t) \\ h'(t) &:= x - t \end{aligned}$$

Als Stammfunktion für das h' können wir dann

$$h(t) = -\frac{1}{2}(x - t)^2 = -\frac{1}{2!}(x - t)^2$$

nehmen. Mit (1.29) bekommen wir dann

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f''(t) (x - t) dt &= (g \cdot h) \Big|_{t=x_0}^{t=x} - \int_{x_0}^x g'(t) h(t) dt \\ &= -\frac{1}{2!} [f''(t) \cdot (x - t)^2]_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x f'''(t) (x - t)^2 dt \\ &= 0 + \frac{1}{2!} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x f'''(t) (x - t)^2 dt \end{aligned} \quad (1.33)$$

und wenn wir das in (1.32) einsetzen,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \int_{x_0}^x f''(t) (x - t) dt \\ &\stackrel{(1.33)}{=} f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{1}{2!} \int_{x_0}^x f'''(t) (x - t)^2 dt \end{aligned} \quad (1.34)$$

Jetzt sieht man, wie sich die Taylorformel so langsam aufbauen tut, und nach n Iterationen erhält man dann

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) (x - t)^n dt}_{=: R_n(x)} \end{aligned} \quad (1.35)$$

Unter der Annahme, dass der Restterm $R_n(x)$ nach Null konvergiert wenn das n sehr gross wird, das tut er für die Funktionen $\sin x$, $\cos x$ und $\exp x = e^x$, ergibt sich dann also die Taylorreihenentwicklung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) (x - x_0)^k \quad (1.36)$$

Damit ist das Theorem bewiesen. ■

Bemerkung: Beweise und Herleitungen sind grundsätzlich nicht klausurrelevant.

Wir wählen jetzt $x_0 = 0$. Dann reduziert sich (1.27) auf

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \end{aligned} \quad (1.37)$$

Wir haben die folgenden Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	$f^{(4)}(x)$
e^x	e^x	e^x	e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$\sin x$	$\cos x$

oder

$f(x)$	$f^{(2k)}(x)$	$f^{(2k+1)}(x)$
e^x	e^x	e^x
$\sin x$	$(-1)^k \sin x$	$(-1)^k \cos x$
$\cos x$	$(-1)^k \cos x$	$(-1)^{k+1} \sin x$

An der Stelle $x_0 = 0$ ergibt das

$f(x)$	$f^{(2k)}(0)$	$f^{(2k+1)}(0)$
e^x	1	1
$\sin x$	0	$(-1)^k$
$\cos x$	$(-1)^k$	0

Wenn wir jetzt die allgemeine Potenzreihenentwicklung (1.37) in gerade und ungerade Potenzen aufteilen,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n=2k}}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n + \sum_{\substack{n=0 \\ n=2k+1}}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(0) x^{2k+1} \end{aligned} \quad (1.38)$$

und die Formeln für die Ableitungen von oben benutzen, ergibt sich unmittelbar das folgende

Theorem: Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Potenzreihenentwicklungen:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad (1.39)$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \quad (1.40)$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots \quad (1.41)$$

In den Übungen werden wir diese Formeln dann auch noch einmal mit einer numerischen Simulation verifizieren. Sämtliche numerischen Simulationen in dieser Veranstaltung sind nicht klausurrelevant, in der Klausur wird nichts programmiert.

1.4 Die Eulersche Formel

Die Eulersche Formel folgt jetzt direkt aus den Potenzreihenentwicklungen für \sin , \cos und \exp :

Theorem (Eulersche Formel): Für beliebiges $\varphi \in \mathbb{R}$ und mit $i = \sqrt{-1}$ die komplexe imaginäre Einheit gilt:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1.42)$$

Beweis: Wir tun die Potenzreihenentwicklung der e -Funktion nach geraden und ungeraden Potenzen aufteilen und bekommen

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} i^2 &= -1 \\ i^{2k} &= (i^2)^k = (-1)^k \\ i^{2k+1} &= i^{2k} i = (-1)^k i \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k+1} \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos \varphi + i \sin \varphi \end{aligned}$$

und die Formel ist bewiesen. ■

Zum Abschluss dieses week2 wollen wir noch festhalten, dass die Rechenregel $e^{x+y} = e^x e^y$ nicht nur für reelle Zahlen x, y gilt, sondern auch für komplexe Zahlen. Das werden wir dann brauchen wenn wir uns etwa die Überlagerung von harmonischen Schwingungen anschauen.

Theorem: Für beliebige komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w \quad (1.43)$$

Beweis: Wir benutzen die Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} e^z \cdot e^w &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{w^\ell}{\ell!} = \sum_{k,\ell=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^\ell}{\ell!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k,\ell=0 \\ k+\ell=n}}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^\ell}{\ell!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k,\ell=0 \\ k+\ell=n}}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^\ell}{\ell!} \stackrel{\ell=n-k}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \end{aligned} \quad (1.44)$$

mit den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k} \quad (1.45)$$

Nun gelten die folgenden Formeln, für reelle oder komplexe a, b , wir benutzen nur Plus und Mal und da gelten für reelle und für komplexe Zahlen dieselben Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{aligned}$$

oder allgemein

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + n a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{2} a^2 b^{n-2} + n a b^{n-1} + b^n \\ &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Das ist aber genau der Ausdruck, den wir oben in (1.44) haben. Also bekommen wir

$$e^z \cdot e^w \stackrel{(1.44)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \stackrel{(1.46)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n \stackrel{(1.39)}{=} e^{z+w}$$

und die Aussage ist bewiesen. ■