

Da die $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ nach Voraussetzung eine Basis bilden, jedes $\vec{x}$ kann man als Linearkombination der $\vec{v}_k$ schreiben, gilt dann auch $A\vec{x} = V D V^{-1}\vec{x}$ für beliebiges $\vec{x}$ und das Theorem ist bewiesen. ■

Folgerung: Es sei A eine reell oder komplex diagonalisierbare $n \times n$ Matrix mit einer Basis aus Eigenvektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Es sei V die Matrix der Eigenvektoren, genauer

$$V := \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

und V^{-1} sei die Inverse Matrix von V . Dann gilt

$$e^{tA} = V \operatorname{Diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) V^{-1} \quad (6.30)$$

Beweis: Für 2×2 Matrizen hatten wir uns das schon auf dem 5. Übungsblatt in der 2. Aufgabe überlegt, für $n \times n$ Matrizen geht der Beweis völlig analog. ■

6.2 Diagonalisierbarkeit von quadratischen Matrizen

Für diagonalisierbare Matrizen lassen sich also insbesondere Matrix-Exponentiale besonders einfach berechnen. In diesem Abschnitt wollen wir ein einfaches Kriterium für die Diagonalisierbarkeit von Matrizen angeben, welches insbesondere in der Physik von grosser Bedeutung ist. Erinnern wir uns zunächst an die Standardskalarprodukte im $\mathbb{R}^n$ und im $\mathbb{C}^n$, sie sind definiert durch

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad (6.31)$$

$$(\vec{w}, \vec{z})_{\mathbb{C}^n} := \bar{w}_1 z_1 + \cdots + \bar{w}_n z_n = \sum_{j=1}^n \bar{w}_j z_j \quad (6.32)$$

wobei $\bar{w}_j$ das komplex Konjugierte der komplexen Zahl w_j meint. Also falls etwa $w_j = a_j + ib_j$ mit reellen a_j, b_j , dann ist $\bar{w}_j := a_j - ib_j$. Der Grund, warum man für komplexe Vektoren das so definiert, ist, dass man dann immer noch die Eigenschaft

$$(\vec{z}, \vec{z})_{\mathbb{C}^n} \geq 0 \quad \text{und} \quad (\vec{z}, \vec{z})_{\mathbb{C}^n} = 0 \Leftrightarrow \vec{z} = \vec{0} \quad (6.33)$$

hat, für Skalarprodukte möchte man das immer so haben. Ist dann A eine beliebige $n \times n$ Matrix, dann gelten die folgenden Aussagen (die Identität (6.34) hatten wir uns in Aufgabe 5 vom Ü-Blatt 6 überlegt und (6.35) zeigt man dann analog):

$$(A\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n} = (\vec{x}, A^T \vec{y})_{\mathbb{R}^n} \quad (6.34)$$

$$(A\vec{w}, \vec{z})_{\mathbb{C}^n} = (\vec{w}, A^* \vec{z})_{\mathbb{C}^n} \quad (6.35)$$

wobei die adjungierte Matrix A^* durch

$$A^* := \bar{A}^T \quad (6.36)$$

gegeben ist. Beim reellen Skalarprodukt kann man eine Matrix mit dem Transponierten auf die andere Seite bringen, und beim komplexen Skalarprodukt geht das mit der adjungierten Matrix. Die folgenden Begriffe brauchen wir dann gleich in dem nachfolgenden Theorem zur Diagonalisierbarkeit von Matrizen:

Definition (symmetrische und selbstadjungierte Matrizen): Eine $n \times n$ Matrix A heisst

$$\begin{array}{lll} \text{symmetrisch} & \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} & A^T = A \\ \text{selbstadjungiert} & \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} & A^* = A \end{array}$$

Ein kleines Beispiel, es seien

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix} \quad (6.37)$$

Dann sind die Matrizen A_1 und A_2 symmetrisch und die Matrizen A_1 und A_3 sind selbstadjungiert (eine reelle symmetrische Matrix ist immer auch selbstadjungiert). Jetzt haben wir alle Vorbereitungen getroffen, um das folgende Theorem angeben zu können:

Theorem (Diag'barkeit von symmetrischen und selbstadjungierten Matrizen):

- a) Jede reelle, symmetrische $n \times n$ Matrix A ist diagonalisierbar. Genauer: Es gibt eine Orthonormalbasis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ aus Eigenvektoren des $\mathbb{R}^n$ mit

$$A \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \quad \text{und} \quad (\vec{v}_j, \vec{v}_k)_{\mathbb{R}^n} = \delta_{j,k} \quad (6.38)$$

- b) Jede komplexe, selbstadjungierte $n \times n$ Matrix A ist diagonalisierbar. Genauer: Es gibt eine Orthonormalbasis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ aus Eigenvektoren des $\mathbb{C}^n$ mit

$$A \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k \quad \text{und} \quad (\vec{v}_j, \vec{v}_k)_{\mathbb{C}^n} = \delta_{j,k} \quad (6.39)$$

Dabei sind die Eigenwerte notwendig reell, $\lambda_k \in \mathbb{R}$.

Beweis: ohne Beweis. Einen vollständigen Beweis für die komplexe Version können Sie etwa in dem Skript *Lineare Algebra für Elektrotechnik* von Volker Bach an der TU Braunschweig finden,

<https://hsrm-mathematik.de/SS2026/LinAlg-ING/LinAlg-ET-WS2526-TU-Braunschweig.pdf>

Das Theorem finden Sie dort im Kapitel X.3 unter dem Begriff 'Spektralsatz'. ■

Erinnern wir uns an die Gleichungen (6.22) und (6.23) für diagonalisierbare Matrizen,

$$A = V D V^{-1}$$

wobei in den Spalten von V die Eigenvektoren stehen,

$$V = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Für Orthonormalbasen (ONB) wird das V^{-1} besonders einfach. Betrachten wir dazu die Matrixprodukte $V^T V$ oder $V^* V$: Wenn wir eine reelle ONB haben, können wir schreiben

$$\begin{aligned} V^T V &= \begin{pmatrix} - & \vec{v}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{v}_n & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \left((\vec{v}_i, \vec{v}_j)_{\mathbb{R}^n} \right)_{i,j=1,\dots,n} \\ &\stackrel{\text{ONB}}{=} (\delta_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = Id \end{aligned} \quad (6.40)$$

so dass

$$V^T = V^{-1} \quad (6.41)$$

und

$$A = V D V^T \quad (6.42)$$

Wenn wir eine komplexe Orthonormalbasis haben, betrachten wir

$$\begin{aligned} V^* V &= \bar{V}^T V = \begin{pmatrix} - & \overline{\vec{v}_1} & - \\ & \vdots & \\ - & \overline{\vec{v}_n} & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \left((\vec{v}_i, \vec{v}_j)_{\mathbb{C}^n} \right)_{i,j=1,\dots,n} \\ &\stackrel{\text{ONB}}{=} (\delta_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = Id \end{aligned} \quad (6.43)$$

so dass

$$V^* = V^{-1} \quad (6.44)$$

und

$$A = V D V^* \quad (6.45)$$

Definition (orthogonale und unitäre Matrizen): Der folgende Typus von Matrizen steht in 1-zu-1 Korrespondenz zu den Orthonormalbasen im $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$:

a) Die Menge

$$O(n) := \{ V \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid V^T = V^{-1} \} \quad (6.46)$$

heisst Menge der orthogonalen Matrizen.

b) Die Menge

$$U(n) := \{ U \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid U^* = U^{-1} \} \quad (6.47)$$

heisst Menge der unitären Matrizen.

Wegen $\det[A^{-1}] = 1/\det A$ und $\det[A^T] = \det A$ findet man für orthogonale Matrizen

$$\det V = \det[V^T] = \det[V^{-1}] = 1/\det V \quad (6.48)$$

oder

$$(\det V)^2 = 1 \quad (6.49)$$

Also, orthogonale Matrizen sind ja nach Definition reelle Matrizen,

$$\det V = \pm 1 \quad (6.50)$$

Für unitäre Matrizen sieht die Rechnung so aus:

$$\overline{\det U} = \det \bar{U} = \det[\bar{U}^T] = \det U^* = \det[U^{-1}] = 1/\det U \quad (6.51)$$

so dass

$$\det U \overline{\det U} = |\det U|^2 = 1 \quad (6.52)$$

oder

$$|\det U| = 1 \quad (6.53)$$

Da $\det U$ jetzt eine komplexe Zahl sein kann, bedeutet das dann, dass $\det U$ von der Form

$$\det U = e^{i\alpha} \quad (6.54)$$

sein muss, man sagt dann auch, $\det U$ ist ein reiner Phasenfaktor.

Man definiert dann noch die Menge der speziellen orthogonalen Matrizen $SO(n)$ und die Menge der speziellen unitären Matrizen $SU(n)$ durch

$$SO(n) := \{ V \in O(n) \mid \det V = +1 \} \quad (6.55)$$

$$SU(n) := \{ U \in U(n) \mid \det U = +1 \} \quad (6.56)$$

Diese Bezeichnungen sind standard und werden häufig in der Literatur verwendet.

6.3 Singulärwertzerlegung von rechteckigen Matrizen

(dieses Material ist nicht mehr klausurrelevant)

Häufig hat man es mit rechteckigen anstatt mit quadratischen Matrizen zu tun. Ein Bild zum Beispiel ist typischerweise rechteckig, nicht quadratisch, und, wenn es ein schwarz-weiß Bild ist wie im nächsten Kapitel, ist es gegeben durch eine $m \times n$ Matrix

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (6.57)$$