

6. Eigenwerte und Singulärwerte von Matrizen

6.1 Eigenwerte und Eigenvektoren von quadratischen Matrizen

Die Begriffe Eigenwerte und Eigenvektoren sind nicht nur fundamental für die lineare Algebra, sondern sie spielen in vielen Bereichen der Natur-, Ingenieur- und der quantitativen Wirtschaftswissenschaften eine wichtige Rolle. Sie sind folgendermaßen definiert:

Definition (Eigenvektor und Eigenwert): Es sei A eine beliebige $n \times n$ Matrix. Ein Vektor $\vec{v} \neq \vec{0}$ mit

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad (6.1)$$

heißt ein Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert λ .

Bemerkung: Ist $\vec{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ , dann ist auch $\vec{w} := c\vec{v}$ mit einer beliebigen Konstanten $c \neq 0$ Eigenvektor zum selben Eigenwert λ , wir haben

$$A\vec{w} = A(c\vec{v}) = cA\vec{v} = c\lambda\vec{v} = \lambda c\vec{v} = \lambda\vec{w}$$

Eigenvektoren sind also nie eindeutig, sondern höchstens bis auf Normierung eindeutig. Schauen wir uns zunächst mal ein Beispiel an:

Beispiel: Es sei $a \in \mathbb{R}$ ein reeller Parameter und $\epsilon \in \{+1, -1\}$ sei ein Vorzeichen. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon a^2 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

Wann existiert eine Basis aus Eigenvektoren?

Lösung: Wir müssen alle Lösungen der Gleichung

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= \lambda\vec{v} \\ \Leftrightarrow A\vec{v} - \lambda\vec{v} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow (A - \lambda Id)\vec{v} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (6.3)$$

finden. Dabei ist Id die 2×2 Einheitsmatrix und für die gilt ja $Id\vec{v} = \vec{v}$,

$$Id\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \vec{v} \quad (6.4)$$

Gleichung (6.3) können wir als ein lineares Gleichungssystem für die Koordination v_1 und v_2 von $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auffassen. Nehmen wir an, die Matrix

$$M := A - \lambda Id \quad (6.5)$$

wäre invertierbar. Dann können wir (6.3) mit M^{-1} multiplizieren und bekommen notwendigerweise

$$\vec{v} = M^{-1}M\vec{v} \stackrel{(6.5)}{=} M^{-1}(A - \lambda Id)\vec{v} \stackrel{(6.3)}{=} M^{-1}\vec{0} = \vec{0}$$

Wir wollen aber Vektoren $\vec{v} \neq \vec{0}$ finden. Das geht also nur dann, wenn die Matrix M nicht invertierbar ist. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, das hatten wir uns in Kapitel 4 in (4.43) überlegt,

$$\det M = \det[A - \lambda Id] \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.6)$$

Konkret in unserem Fall liefert das

$$\det \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon a^2 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ \epsilon a^2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - \epsilon a^2 \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$(\lambda - 1)^2 \stackrel{!}{=} \epsilon a^2 \quad (6.7)$$

Betrachten wir zunächst den

Fall $\epsilon = +1$: Wir bekommen die Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = 1 \pm a \quad (6.8)$$

und die Eigenvektoren $\vec{v} = (v_1, v_2)$ sind Lösungen von (6.3),

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_{\pm} & 1 \\ a^2 & 1-\lambda_{\pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp a & 1 \\ a^2 & \mp a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.9)$$

oder explizit ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \mp a v_1 + v_2 &= 0 \\ a^2 v_1 \mp a v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Wenn wir die erste Zeile in (6.10) mit $\mp a$ multiplizieren, bekommen wir offensichtlich gerade die zweite Zeile heraus, so dass wir die zweite Zeile weglassen können, sie ist redundant. Wir müssen also lösen

$$\mp a v_1 + v_2 = 0 \quad (6.11)$$

und bekommen damit die Eigenvektoren

$$\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ +a \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

was man auch nochmal durch explizites Nachrechnen bestätigen kann,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1+a \\ a^2+a \end{pmatrix} = (1+a) \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-a \\ a^2-a \end{pmatrix} = (1-a) \begin{pmatrix} 1 \\ -a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6.13)$$

Für $a \neq 0$ sind $\vec{v}_+$ und $\vec{v}_-$ linear unabhängig, sie bilden eine Basis des $\mathbb{R}^2$. Für $a = 0$ gibt es nur einen Eigenvektor $\vec{v} = \vec{e}_1 = (1, 0)$ so dass man keine Basis aus Eigenvektoren angeben kann. Betrachten wir jetzt den

Fall $\epsilon = -1$: In diesem Fall lautet die Gleichung (6.7)

$$(\lambda - 1)^2 \stackrel{!}{=} -a^2 \quad (6.14)$$

Die Lösungsmenge von Gleichung (6.14) hängt offensichtlich davon ab, ob wir nur reelle Zahlen oder auch komplexe Zahlen zulassen wollen. Wir müssen eine weitere Fallunterscheidung machen:

Komplexer Fall: Der Grundraum ist $\mathbb{C}^2$ und es sind komplexe Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C}$ zugelassen: In dem Fall bekommen wir die komplexen Eigenwerte

$$\lambda_{\pm} = 1 \pm ia \quad (6.15)$$

und die Eigenvektoren $\vec{v}_{\pm}$ ergeben sich aus dem Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_{\pm} & 1 \\ -a^2 & 1 - \lambda_{\pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp ia & 1 \\ -a^2 & \mp ia \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.16)$$

oder explizit ausgeschrieben

$$\begin{aligned} \mp ia v_1 + v_2 &= 0 \\ -a^2 v_1 \mp ia v_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Wenn wir die erste Zeile in (6.17) jetzt mit $\mp ia$ multiplizieren, bekommen wir wieder zweite Zeile heraus, so dass wir sie wieder weglassen können. Wir müssen dann lösen

$$\mp ia v_1 + v_2 = 0 \quad (6.18)$$

und bekommen so die Eigenvektoren

$$\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ +ia \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -ia \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Für $a \neq 0$ sind die wieder linear unabhängig und bilden eine Basis des $\mathbb{C}^2$.

Reeller Fall: Der Grundraum ist $\mathbb{R}^2$ und wir wollen nur reelle Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ zulassen: In dem Fall hat die Gleichung (6.14) keine Lösungen und es gibt keine Eigenwerte und keine Eigenvektoren. ■

Halten wir die folgenden Begrifflichkeiten fest:

Definition (charakteristisches Polynom): Es sei A eine beliebige $n \times n$ Matrix. Dann heisst das Polynom

$$\chi_A(\lambda) := \det[A - \lambda Id] \quad (6.20)$$

das charakteristische Polynom der Matrix A . Die Eigenwerte einer Matrix A sind dann genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda)$ und die Eigenvektoren sind genau die nichttrivialen Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$(A - \lambda Id) \vec{v} = \vec{0} \quad (6.21)$$

Die Menge der Eigenwerte und Eigenvektoren hängt davon ab, ob der Grundraum der $\mathbb{R}^n$ oder der $\mathbb{C}^n$ ist.

Definition (Diagonalisierbarkeit): Es sei A eine beliebige $n \times n$ Matrix. Dann heisst A

- reell diagonalisierbar, falls es eine Basis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren mit reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt.
- komplex diagonalisierbar, falls es eine Basis $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ des $\mathbb{C}^n$ aus Eigenvektoren mit komplexen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt.

Da jede reelle Zahl auch eine komplexe Zahl ist, gilt: A reell diagonalisierbar $\Rightarrow A$ komplex diagonalisierbar. Die Umkehrung gilt offensichtlich nicht wie wir gerade in dem Beispiel gesehen haben, es gibt komplex diagonalisierbare Matrizen, die nicht reell diagonalisierbar sind.

Theorem: Es sei A eine reell oder komplex diagonalisierbare $n \times n$ Matrix mit einer Basis aus Eigenvektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, es gelte also $A \vec{v}_k = \lambda_k \vec{v}_k$. Weiter sei V die Matrix der Eigenvektoren, genauer

$$V := \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

und V^{-1} sei die Inverse Matrix von V . Dann gilt

$$A = V D V^{-1} \quad (6.23)$$

wobei D die Diagonalmatrix ist, die auf der Hauptdiagonalen die Einträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ hat, und sonst alles Nullen,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} =: \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (6.24)$$

Beweis: Es seien $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ die Standardbasisvektoren im $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$. Nach Definition von V ist dann

$$V \vec{e}_k = \vec{v}_k \quad (6.25)$$

in den Spalten einer Matrix stehen die Bilder der Basisvektoren. Wir wenden auf beiden Seiten V^{-1} an und bekommen

$$\vec{e}_k = V^{-1} \vec{v}_k \quad (6.26)$$

Weiterhin ist

$$D \vec{e}_k = \lambda_k \vec{e}_k \quad (6.27)$$

Also insgesamt

$$V D V^{-1} \vec{v}_k \stackrel{(6.26)}{=} V D \vec{e}_k \stackrel{(6.27)}{=} V \lambda_k \vec{e}_k = \lambda_k V \vec{e}_k \stackrel{(6.25)}{=} \lambda_k \vec{v}_k = A \vec{v}_k \quad (6.28)$$

Da die $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ nach Voraussetzung eine Basis bilden, jedes $\vec{x}$ kann man als Linearkombination der $\vec{v}_k$ schreiben, gilt dann auch $A\vec{x} = V D V^{-1}\vec{x}$ für beliebiges $\vec{x}$ und das Theorem ist bewiesen. ■

Folgerung: Es sei A eine reell oder komplex diagonalisierbare $n \times n$ Matrix mit einer Basis aus Eigenvektoren $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Es sei V die Matrix der Eigenvektoren, genauer

$$V := \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad (6.29)$$

und V^{-1} sei die Inverse Matrix von V . Dann gilt

$$e^{tA} = V \operatorname{Diag}(e^{t\lambda_1}, \dots, e^{t\lambda_n}) V^{-1} \quad (6.30)$$

Beweis: Für 2×2 Matrizen hatten wir uns das schon auf dem 5. Übungsblatt in der 2. Aufgabe überlegt, für $n \times n$ Matrizen geht der Beweis völlig analog. ■

6.2 Diagonalisierbarkeit von quadratischen Matrizen

Für diagonalisierbare Matrizen lassen sich also insbesondere Matrix-Exponentiale besonders einfach berechnen. In diesem Abschnitt wollen wir ein einfaches Kriterium für die Diagonalisierbarkeit von Matrizen angeben, welches insbesondere in der Physik von grosser Bedeutung ist. Erinnern wir uns zunächst an die Standardskalarprodukte im $\mathbb{R}^n$ und im $\mathbb{C}^n$, sie sind definiert durch

$$(\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n} := x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j \quad (6.31)$$

$$(\vec{w}, \vec{z})_{\mathbb{C}^n} := \bar{w}_1 z_1 + \cdots + \bar{w}_n z_n = \sum_{j=1}^n \bar{w}_j z_j \quad (6.32)$$

wobei $\bar{w}_j$ das komplex Konjugierte der komplexen Zahl w_j meint. Also falls etwa $w_j = a_j + ib_j$ mit reellen a_j, b_j , dann ist $\bar{w}_j := a_j - ib_j$. Der Grund, warum man für komplexe Vektoren das so definiert, ist, dass man dann immer noch die Eigenschaft

$$(\vec{z}, \vec{z})_{\mathbb{C}^n} \geq 0 \quad \text{und} \quad (\vec{z}, \vec{z})_{\mathbb{C}^n} = 0 \Leftrightarrow \vec{z} = \vec{0} \quad (6.33)$$

hat, für Skalarprodukte möchte man das immer so haben. Auf den Übungsblättern 6 und 7 hatten wir dann gezeigt, dass für beliebige $n \times n$ Matrizen die folgenden Aussagen gelten:

$$(A\vec{x}, \vec{y})_{\mathbb{R}^n} = (\vec{x}, A^T \vec{y})_{\mathbb{R}^n} \quad (6.34)$$

$$(A\vec{w}, \vec{z})_{\mathbb{C}^n} = (\vec{w}, A^* \vec{z})_{\mathbb{C}^n} \quad (6.35)$$

wobei die adjungierte Matrix A^* durch

$$A^* := \bar{A}^T \quad (6.36)$$