

5. Lineare Gleichungssysteme

Ein allgemeines lineares Gleichungssystem von n Gleichungen mit n Variablen ist gegeben durch

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned} \quad (5.1)$$

Fassen wir die Koeffizienten a_{ij} in der Koeffizientenmatrix A , die Zahlen y_i auf der rechten Seite in dem Vektor $\vec{y}$ und die gesuchten Variablen x_i in dem Vektor $\vec{x}$ zusammen,

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

dann können wir das System auch etwas kompakter in Matrix-Vektor-Schreibweise angeben durch:

$$A\vec{x} = \vec{y} \quad (5.3)$$

Ist dann die Matrix A invertierbar, das ist genau dann der Fall, wenn die Determinante von A ungleich 0 ist, dann können wir sofort eine Lösung in der Form

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \quad (5.4)$$

hinschreiben. Daraus ergibt sich dann die Cramersche Regel, die wir uns gleich in dem nächsten Abschnitt anschauen.

Ist die Matrix A nicht invertierbar, das ist genau dann der Fall, wenn $\det A = 0$ ist, dann bedeutet das, dass eine oder mehrere Zeilen auf der linken Seite von (5.1) durch Linearkombinationen der übrigen Zeilen gegeben sind. Je nachdem, ob die entsprechenden y_i 's auf der rechten Seite dann durch dieselben Linearkombinationen der übrigen y_k gegeben sind oder nicht, hat man dann entweder redundante Gleichungen, also zum Beispiel $x + z = 3$ und $2x + 2z = 6$, effektiv hat man dann nur eine Gleichung, man kann das z beliebig vorgeben und bekommt unendlich viele Lösungen. Oder man hat zum Beispiel $x + z = 3$ und $2x + 2z = 5$, die beiden Gleichungen widersprechen sich und es gibt keine Lösung. In solchen Fällen ist die Cramersche Regel nicht mehr anwendbar und man muss den Gauss-Algorithmus verwenden, das schauen wir uns dann im Kapitel 5.2 an.

5.1 Die Cramersche Regel

Wir machen uns die Formel wieder für den 3×3 Fall klar, der allgemeine $n \times n$ Fall geht dann völlig analog, wieder nur mit dem Unterschied, dass die Notation etwas aufwändiger wird. Wir wählen dieselbe Notation wie in dem Kapitel 4.2, für die Koeffizientenmatrix nehmen wir also die Buchstaben

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} =: A \quad (5.5)$$

Das A^{-1} hatten wir in dem Kapitel 4.2 berechnet, es war

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

mit

$$A_1 := \det \begin{pmatrix} 1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 1 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad A_3 := \det \begin{pmatrix} 0 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 1 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$C_1 := \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 := \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_3 := \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{pmatrix}$$

und analog für die B_k . Die Lösung (5.4) ist dann also gegeben durch

$$\vec{x} = A^{-1} \vec{y} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

oder

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\det A} (A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3) \\ x_2 &= \frac{1}{\det A} (B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3) \\ x_3 &= \frac{1}{\det A} (C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Schauen wir uns etwa das x_2 genauer an. Wenn wir die B_k explizit ausschreiben, lautet die zweite Zeile von (5.8)

$$x_2 = \left[\det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix} y_1 + \det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 1 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix} y_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 1 & c_3 \end{pmatrix} y_3 \right] / \det A$$

Wir benutzen wieder die Linearität der Determinanten-Funktion um die y_j in die Determinanten hereinzuziehen,

$$\begin{aligned} x_2 &\stackrel{(4.2)}{=} \left[\det \begin{pmatrix} a_1 & y_1 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & y_2 & c_2 \\ a_3 & 0 & c_3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 \\ a_2 & 0 & c_2 \\ a_3 & y_3 & c_3 \end{pmatrix} \right] / \det A \\ &\stackrel{(4.2)}{=} \det \begin{pmatrix} a_1 & y_1 & c_1 \\ a_2 & y_2 & c_2 \\ a_3 & y_3 & c_3 \end{pmatrix} / \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Notation}}{=} \frac{\det[\vec{a}, \vec{y}, \vec{c}]}{\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Für x_1 und x_3 ist die Logik völlig analog und wir erhalten die Lösung

$$x_1 = \frac{\det[\vec{y}, \vec{b}, \vec{c}]}{\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \quad x_2 = \frac{\det[\vec{a}, \vec{y}, \vec{c}]}{\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]}, \quad x_3 = \frac{\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{y}]}{\det[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]} \quad (5.10)$$

Das ist die Cramersche Regel. In n Dimensionen liest sich das dann folgendermassen:

Theorem (Cramersche Regel): Gegeben sei das lineare Gleichungssystem (5.1-5.3)

$$A \vec{x} = \vec{y} \quad (5.11)$$

Die Spalten der $n \times n$ Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ wollen wir mit den Vektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ bezeichnen,

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Dann ist die Lösung von (5.11) gegeben durch

$$x_1 = \frac{\det[\vec{y}, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]}{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]}, \quad \dots \quad x_n = \frac{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{y}]}{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n]} \quad (5.13)$$

5.2 Lösung mit dem Gauss-Algorithmus

Wir verdeutlichen die Methode an zwei Beispielen.

Beispiel 1: Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= a \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= b \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= c \\ -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= d \end{aligned} \quad (5.14)$$

wobei die a, b, c, d auf der rechten Seite gegebene Parameter sind. Gesucht sind die $x_1, \dots, x_4$. Das kann man folgendermassen machen. Wir codieren das System durch das Schema

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & -1 & 1 & b \\ 1 & -1 & 1 & 1 & c \\ -1 & 1 & 1 & 1 & d \end{array} \quad (5.15)$$

Wir generieren Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & -2 & 2 & b - a \\ 0 & -2 & 0 & 2 & c - a \\ 0 & 2 & 2 & 0 & d + a \end{array} \quad (5.16)$$

Wir teilen die zweite, dritte und vierte Zeile durch 2:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 0 & -1 & 1 & (b - a)/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & (c - a)/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & (d + a)/2 \end{array} \quad (5.17)$$

Wir vertauschen die zweite mit der vierten Zeile:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & 1 & 0 & (d+a)/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & (c-a)/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & (b-a)/2 \end{array} \quad (5.18)$$

Wir erzeugen Nullen in der zweiten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & (a-d)/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & (d+a)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (c+d)/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & (b-a)/2 \end{array} \quad (5.19)$$

Wir erzeugen Nullen in der dritten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & (a-d)/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & (a-c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (c+d)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & (b+c+d-a)/2 \end{array} \quad (5.20)$$

Wir teilen die vierte Zeile durch 2:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & (a-d)/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & (a-c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & (c+d)/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b+c+d-a)/4 \end{array} \quad (5.21)$$

Wir erzeugen Nullen in der vierten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & (a+b+c-d)/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (a+b-c+d)/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & (a-b+c+d)/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & (b+c+d-a)/4 \end{array} \quad (5.22)$$

Also haben wir die Lösung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a+b+c-d \\ a+b-c+d \\ a-b+c+d \\ -a+b+c+d \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

und wir können auch gleich das Inverse der Koeffizientenmatrix ablesen, ist

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

die ursprüngliche Koeffizientenmatrix, dann gilt offensichtlich

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

was man auch leicht durch explizites Nachrechnen bestätigen kann. Man kann die inverse Matrix auch ganz ohne Buchstaben berechnen, dazu muss man das Anfangsschema folgendermassen upsetzen:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (5.26)$$

Dann macht man genau dieselben Schritte wie in (5.15-5.22): Wir generieren Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (5.27)$$

Wir teilen die zweite, dritte und vierte Zeile durch 2:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array} \quad (5.28)$$

Wir vertauschen die zweite mit der vierten Zeile:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{array} \quad (5.29)$$

Wir erzeugen Nullen in der zweiten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{array} \quad (5.30)$$

Wir erzeugen Nullen in der dritten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad (5.31)$$

Wir teilen die vierte Zeile durch 2:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} \quad (5.32)$$

Wir erzeugen Nullen in der vierten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{array} \quad (5.33)$$

Auf der rechten Seite von (5.33) steht dann die inverse Matrix A^{-1} gegeben durch (5.25).

Mit dem Gauss-Algorithmus kann man also sowohl lineare Gleichungssysteme lösen als auch inverse Matrizen berechnen. Die Methode funktioniert aber auch dann noch, wenn die Koeffizientenmatrix nicht mehr invertierbar ist. Schauen wir uns dazu ein weiteres Beispiel an:

Beispiel 2: Wir betrachten das System

$$\begin{aligned} 4 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 &= a \\ 8 \cdot x_1 + 7 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 + 5 \cdot x_4 &= b \\ 12 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 + 10 \cdot x_3 + 9 \cdot x_4 &= c \\ 16 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 14 \cdot x_3 + 13 \cdot x_4 &= d \end{aligned} \quad (5.34)$$

und codieren es wieder durch das Schema

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & a \\ 8 & 7 & 6 & 5 & b \\ 12 & 11 & 10 & 9 & c \\ 16 & 15 & 14 & 13 & d \end{array} \quad (5.35)$$

Wir erzeugen Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 2 & 3 & b - 2a \\ 0 & 2 & 4 & 6 & c - 3a \\ 0 & 3 & 6 & 9 & d - 4a \end{array} \quad (5.36)$$

Wir erzeugen Nullen in der zweiten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -4 & -8 & 7a - 3b \\ 0 & 1 & 2 & 3 & b - 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c - 2b + a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d - 3b + 2a \end{array} \quad (5.37)$$

Die letzten beiden Zeilen explizit ausgeschrieben lauten dann

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= c - 2b + a \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 &= d - 3b + 2a \end{aligned} \quad (5.38)$$

also einfach

$$\begin{aligned} 0 &= c - 2b + a \\ 0 &= d - 3b + 2a \end{aligned} \quad (5.39)$$

Die Parameter auf der rechten Seite sind ja vorgegeben, also je nachdem, ob das dann auch Null ist oder nicht, bekommt man dann unendlich viele oder keine Lösungen. Wählen wir etwa

$$a = b = c = d = 1 \quad (5.40)$$

so dass es Lösungen gibt. Wir bekommen dann

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & -4 & -8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (5.41)$$

Die letzten beiden Zeilen sind automatisch erfüllt, sie enthalten keine Informationen mehr und wir können sie weglassen. Die erste Zeile teilen wir noch durch 4 und bekommen das End-Schema

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \quad (5.42)$$

Das bedeutet, dass wir x_3 und x_4 beliebig wählen können und x_1 und x_2 sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + 2x_4 + 1 \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4 - 1 \end{aligned} \quad (5.43)$$

Das kann man, muss man aber nicht, noch in Vektor-Schreibweise angeben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + 2x_4 + 1 \\ -2x_3 - 3x_4 - 1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

und man würde sagen, die Lösungsmenge besteht aus einer 2-dimensionalen Ebene im $\mathbb{R}^4$, die durch die Richtungsvektoren $(1, -2, 1, 0)$ und $(2, -3, 0, 1)$ aufgespannt wird und die durch den Aufpunkt $(1, -1, 0, 0)$ geht.

Weitere Beispiele schauen wir uns dann noch in den Übungen an.