1. Komplexe Zahlen

1.1 Definition der komplexen Zahlen

Erinnern wir uns zunächst an die Zahlbereiche der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &:= \{\, 1\,,\, 2\,,\, 3\,, \cdots \} \\
\mathbb{Z} &:= \{\, \cdots\,,\, -3\,,\, -2\,,\, -1\,,\, 0\,,\, 1\,,\, 2\,,\, 3\,, \cdots \} \\
\mathbb{Q} &:= \left\{\, q \;=\; \tfrac{m}{n} \;\middle|\; m, n \;\in\; \mathbb{Z} \,\right\}
\end{aligned}$$

Zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ kommt man von den natürlichen Zahlen durch Betrachen von Gleichungen der Form, sagen wir,

$$m + 5 \;=\; 3 \tag{1.1}$$

Diese Gleichung ist für natürliche Zahlen $\mathbb{N}$ nicht lösbar, natürliche Zahlen sind ja nach Definition immer positiv, so dass man dann die natürlichen Zahlen zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ erweitert hat, so dass man dann also für die Gleichung (1.1) die Lösung

$$m \;=\; -2 \;\in\; \mathbb{Z} \tag{1.2}$$

hinschreiben kann. Analoges gilt für die rationalen Zahlen: Man betrachtet Gleichungen der Form, sagen wir,

$$7 \cdot q \;=\; 3 \tag{1.3}$$

Diese Gleichung hat keine Lösung innerhalb der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, so dass man $\mathbb{Z}$ zum Zahlbereich $\mathbb{Q}$ erweitert hat und man dann eine Lösung

$$q \;=\; \tfrac{3}{7} \;\in\; \mathbb{Q} \tag{1.4}$$

hinschreiben kann. Schliesslich kommt man durch Betrachten von Gleichungen der Form

$$x^2 \;=\; 2 \tag{1.5}$$

zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, man kann sich überlegen, dass eine Lösung von (1.5) nicht in der Form m/n geschrieben werden kann, also keine rationale Zahl sein kann, man hat

$$x \;=\; \sqrt{2} \;\in\; \mathbb{R} \tag{1.6}$$

aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Zu den komplexen Zahlen kommt man nun durch Betrachten der Gleichung

$$z^2 \;=\; -1 \tag{1.7}$$

Da das Quadrat x^2 von reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ immer positiv ist, kann die Gleichung (1.7) offensichtlich keine Lösung innerhalb der reellen Zahlen haben. Man muss den Zahlbereich wieder erweitern. Das geht jetzt folgendermassen:

$$\mathbb{C} \;:=\; \left\{\, z \;=\; (x, y) \;\in\; \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \text{mit den Rechenoperationen} \;\; + \;\; \text{und} \;\; \cdot \,\right\} \tag{1.8}$$

wobei die Rechenoperationen Plus und Mal für komplexe Zahlen $z_1 = (x_1, y_1)$ und $z_2 = (x_2, y_2)$ wie folgt zu definieren sind:

- **komplexes Plus:** Das Plus ist die übliche Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$,

$$z_1 \;+\; z_2 \;\;=\;\; (x_1, y_1) \;+\; (x_2, y_2) \;\;:=\;\; (\,x_1 + x_2\,,\, y_1 + y_2\,) \tag{1.9}$$

- **komplexes Mal:** Das Mal sieht auf den ersten Blick ein bischen gewöhnungsbedürftig aus, im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass das der geometrischen Regel 'die Radien werden multipliziert und die Winkel werden addiert' entspricht:

$$z_1 \;\cdot\; z_2 \;\;=\;\; (x_1, y_1) \;\cdot\; (x_2, y_2) \;\;:=\;\; \big(\,x_1\, x_2 \;-\; y_1\, y_2\,,\, x_1\, y_2 \;+\; y_1\, x_2\,\big) \tag{1.10}$$

Die reellen Zahlen wollen wir mit der x-Achse im $\mathbb{R}^2$ identifizieren,

$$\mathbb{R} \;\;\cong\;\; \Big\{\, x \;\stackrel{\text{Notation}}{:=}\; (x, 0) \;\Big|\; x \;\in\; \mathbb{R} \;\Big\} \tag{1.11}$$

Checken wir eben, dass das mit dem üblichen Plus und Mal für reelle Zahlen konsistent ist:

$$x_1 \;+\; x_2 \;\;\stackrel{\text{Notation}}{=}\;\; (x_1, 0) \;+\; (x_2, 0) \;\;\stackrel{(1.9)}{=}\;\; (x_1 + x_2, 0) \;\;\stackrel{\text{Notation}}{=}\;\; x_1 \;+\; x_2$$

das passt auf jeden Fall, und für das Mal bekommen wir:

$$\begin{aligned} x_1 \;\cdot\; x_2 \;\; &\stackrel{\text{Notation}}{=} \;\; (x_1, 0) \;\cdot\; (x_2, 0) \\ &\stackrel{(1.10)}{=} \;\; (\,x_1\, x_2 \;-\; 0 \cdot 0\,,\, x_1 \cdot 0 \;+\; 0 \cdot x_2\,) \\ &= \;\; (\,x_1\, x_2\,,\, 0\,) \\ &\stackrel{\text{Notation}}{=} \;\; x_1\, x_2 \end{aligned}$$

das ist also auch konsistent. Schliesslich definieren wir jetzt die imaginäre Einheit i durch

$$i \;\;:=\;\; (0, 1) \tag{1.12}$$

In seltenen Fällen wird in ingenieurwissenschaftlichen Büchern auch der Buchstabe j anstatt i verwendet, wir benutzen hier das i. Dann bekommen wir

$$\begin{aligned} i^2 \;\; &= \;\; (0, 1) \;\cdot\; (0, 1) \\ &\stackrel{(1.10)}{=} \;\; (\,0 \cdot 0 \;-\; 1 \cdot 1\,,\, 0 \cdot 1 \;+\; 1 \cdot 0\,) \\ &= \;\; (\,-1\,,\, 0\,) \\ &\stackrel{\text{Notation (1.11)}}{=} \;\; -1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

Also sind die komplexen Lösungen der Gleichung $z^2 = -1$ gegeben durch

$$z \;\;=\;\; \pm\, i \;\;=\;\; \pm\, (0, 1) \tag{1.14}$$

Und wegen (mit $y \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} i \cdot y \;\; &\stackrel{(1.11, 1.12)}{=} \;\; (0, 1) \;\cdot\; (y, 0) \\ &\stackrel{(1.10)}{=} \;\; (\,0 \cdot y \;-\; 1 \cdot 0\,,\, 0 \cdot 0 \;+\; 1 \cdot y\,) \\ &= \;\; (\,0\,,\, y\,) \end{aligned} \tag{1.15}$$

können wir eine beliebige komplexe Zahl $z = (x, y)$ dann immer schreiben als

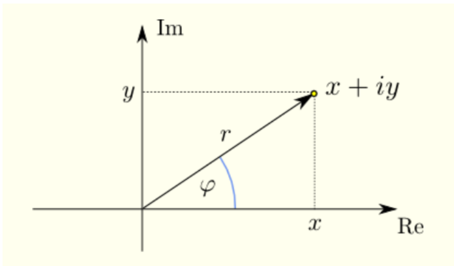
$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &\overset{(1.9)}{=} (x, 0) + (0, y) \\ &\overset{(1.15)}{=} (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) \\ &\overset{\substack{\text{Notationen} \\ (1.11, 1.12)}}{=:} x + i\,y \end{aligned} \tag{1.16}$$

1.2 Geometrische Bedeutung der komplexen Multiplikation

Um die geometrische Bedeutung zu verstehen, ist es günstig, anstelle von kartesischen Koordinaten (x, y) Polarkoordinaten gegeben durch

$$(x, y) = (\, r\,\cos\varphi \,,\, r\,\sin\varphi \,) = r\,(\cos\varphi, \sin\varphi) \tag{1.17}$$

zu benutzen:



$$r^2 = x^2 + y^2\,, \qquad \tan\varphi = \tfrac{y}{x}$$

Weiterhin wollen wir uns an die Additionstheoreme aus der Schule für den Sinus und den Cosinus erinnern:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta + \sin\beta\,\cos\alpha \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta \end{aligned} \tag{1.18}$$

Gegeben seien jetzt die beiden komplexen Zahlen

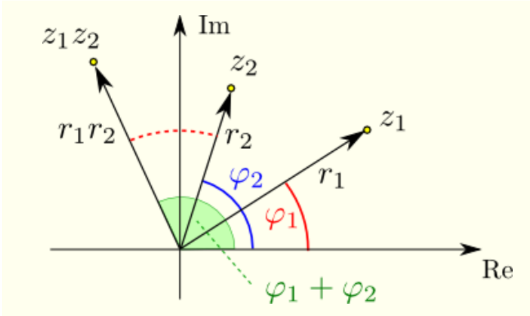
$$\begin{aligned} z_1 &= (x_1, y_1) = (\, r_1\,\cos\varphi_1 \,,\, r_1\,\sin\varphi_1 \,) \\ z_2 &= (x_2, y_2) = (\, r_2\,\cos\varphi_2 \,,\, r_2\,\sin\varphi_2 \,) \end{aligned} \tag{1.19}$$

Mit der Definition (1.10) für die komplexe Multiplikation erhalten wir dann

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \big(\, x_1\,x_2 - y_1\,y_2 \,,\, x_1\,y_2 + y_1\,x_2 \,\big) \\ &= \Big(\, r_1\cos\varphi_1\; r_2\cos\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1\; r_2\sin\varphi_2 \,,\, r_1\cos\varphi_1\; r_2\sin\varphi_2 + r_1\sin\varphi_1\; r_2\cos\varphi_2 \,\Big) \\ &= \Big(\, r_1 r_2 \big[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\big] \,,\, r_1 r_2 \big[\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2\big] \,\Big) \\ &\overset{(1.18)}{=} r_1\,r_2 \Big(\, \cos[\varphi_1 + \varphi_2] \,,\, \sin[\varphi_1 + \varphi_2] \,\Big) \end{aligned} \tag{1.20}$$

Also geometrische Bedeutung der komplexen Multiplikation:

Die Radien werden multipliziert und die Winkel werden addiert.



Zusammenfassung: Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{C} \;=\; \Big\{ \; z \;=\; x \,+\, i\,y \;\Big|\; x, y \;\in\; \mathbb{R} \;\; \text{und} \;\; i^2 \;=\; -1 \; \Big\} \tag{1.21}$$

mit der Notation (1.16) und den Rechenoperationen + und $\cdot$ gegeben durch (1.9) und (1.10). Die Grössen

$$\mathrm{Re}(z) \;:=\; x\,, \qquad \mathrm{Im}(z) \;:=\; y \tag{1.22}$$

heissen der Real- und Imaginärteil von $z = x + iy$. Beachten Sie, dass auch der Imaginärteil von z eine reelle Zahl ist, da ist das i per Definition nicht mit drin. Das komplex Konjugierte $\bar{z}$ von $z = x + iy$ ist definiert durch $\bar{z} := x - iy$. Die Polardarstellung von $z = x + iy$ ist gegeben durch

$$z \;=\; r\,(\,\cos\varphi \,+\, i\,\sin\varphi\,) \tag{1.23}$$

mit dem Betrag $|z| := r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und dem Winkel oder Argument φ gegeben durch

$$\sin\varphi \;=\; \tfrac{y}{r}\,, \qquad \cos\varphi \;=\; \tfrac{x}{r} \tag{1.24}$$

Der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ lässt sich dann auch schreiben als

$$|z|^2 \;=\; z\bar{z} \;=\; (x+iy)(x-iy) \;=\; x^2 - (iy)^2 \;=\; x^2 + y^2 \tag{1.25}$$

und für den Kehrwert bekommt man etwa

$$\tfrac{1}{z} \;=\; \tfrac{1}{z}\,\tfrac{\bar{z}}{\bar{z}} \;=\; \tfrac{\bar{z}}{|z|^2} \;=\; \tfrac{x-iy}{x^2+y^2} \tag{1.26}$$

so dass $\mathrm{Re}(1/z) \;=\; x/(x^2+y^2)$ und $\mathrm{Im}(1/z) \;=\; -y/(x^2+y^2)\,.$

Obwohl wir es hier nicht vollständig explizit nachrechnen, wollen wir noch bemerken, dass alle standard Rechenregeln für die reellen Zahlen wie etwa $a \cdot b = b \cdot a$ oder das Ausmultiplizieren von Klammern $(a + b) \cdot c = a \cdot c \,+\, b \cdot c$ auch für komplexe Zahlen gelten, man kann mit komplexen Zahlen rechnen wie mit reellen Zahlen unter Berücksichtigung der zusätzlichen Rechenregel $i^2 = -1\,.$

Zum Abschluss dieses week1 wollen wir noch etwas die trigonometrischen Funktionen sin und cos auffrischen und uns an den Zusammenhang zwischen Winkel im Bogenmass und Winkel in Grad erinnern, das machen wir auf dem neuen Übungsblatt 1.