

8. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Die Matrix-Darstellung einer Drehung um die $(1, 1, 1)$ -Achse mit einem Winkel von 60° im Rechtsschraubensinn ist gegeben durch

$$R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Determinante $\det R$. Berechnen Sie weiterhin die Matrix-Produkte RR^T und R^TR . Was ist also R^{-1} ?

Aufgabe 2) Es seien $R_j(\varphi)$ die Drehungen im $\mathbb{R}^3$ mit Winkel φ um die j -Achse gegeben durch

$$R_1(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad R_2(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix},$$
$$R_3(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie für alle $j = 1, 2, 3$ die Determinante $\det R_j(\varphi)$ und die Matrix-Produkte $R_j(\varphi)^T R_j(\varphi)$. Erinnern Sie sich dazu an die trigonometrische Identität $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$.

Aufgabe 3) Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie die Formel

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

durch explizites Berechnen der Determinante und der Matrix-Produkte AA^{-1} oder $A^{-1}A$.

Aufgabe 4) Gegeben sei eine $n \times n$ Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, die wir in 4 Blöcke, einen $k \times k$ Block $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$, einen $k \times (n-k)$ Block $B \in \mathbb{R}^{k \times (n-k)}$, einen $(n-k) \times k$ Block $C \in \mathbb{R}^{(n-k) \times k}$ und einen $(n-k) \times (n-k)$ Block $D \in \mathbb{R}^{(n-k) \times (n-k)}$ zerlegen wollen,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Dann gilt die folgende Formel zum Invertieren der Matrix M :

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \quad (1)$$

mit

$$E = (A - BD^{-1}C)^{-1} \quad F = -EBD^{-1} \quad (2)$$

$$G = -D^{-1}CE \quad H = (D - CA^{-1}B)^{-1} \quad (3)$$

Wir wollen diese Formel anhand der Drehmatrix R aus Aufgabe 1 überprüfen. Dazu schreiben wir

$$R = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \stackrel{\text{Notation}}{=} \begin{pmatrix} a & \vec{b} \\ \vec{c} & D \end{pmatrix}$$

mit

$$A = a = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \quad B = \vec{b} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$$

$$C = \vec{c} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad D = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2},$$

wir haben also $n = 3$ mit $k = 1$ und $n - k = 2$. Der Block A ist dann also eine 1×1 Matrix oder einfach nur eine Zahl, deswegen haben wir den Buchstaben klein a genommen. Entsprechend ist B eine 1×2 Matrix, welche wir auch als einen Zeilenvektor auffassen können, deshalb haben wir die Notation $\vec{b}$ genommen. Die Formeln (1-3) reduzieren sich dann auf

$$\begin{pmatrix} a & \vec{b} \\ \vec{c} & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \stackrel{\text{Notation}}{=} \begin{pmatrix} e & \vec{f} \\ \vec{g} & H \end{pmatrix} \quad (4)$$

mit

$$e = (a - \vec{b}D^{-1}\vec{c})^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times 1} \quad \vec{f} = -e\vec{b}D^{-1} \in \mathbb{R}^{1 \times 2} \quad (5)$$

$$\vec{g} = -D^{-1}\vec{c}e \in \mathbb{R}^{2 \times 1} \quad H = (D - \vec{c}a^{-1}\vec{b})^{-1} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \quad (6)$$

Da in unserem Fall das R eine Drehmatrix ist und da für beliebige Drehmatrizen $R^T R = R R^T = Id$ gilt, muss in unserem Fall

$$R^{-1} = R^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

sein. Berechnen Sie jetzt also $e, \vec{f}, \vec{g}, H$ gemäss der Formeln (5) und (6) und checken Sie, ob Sie damit das R^{-1} gegeben durch (7) reproduzieren können. Das D^{-1} können Sie mit Hilfe der Formel aus Aufgabe 3 berechnen.

Farbcodierung Aufgaben:	
rote Aufgaben	notwendig zum Bestehen der Klausur
blaue Aufgaben	nur wenn Sie ein 'sehr gut' haben wollen
grüne Aufgaben	zur Vertiefung, nicht klausurrelevant