

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Führen Sie mit Hilfe von Formel (3.26) aus dem week7 (oder mit Hilfe von Formel (3.33)) die folgenden Berechnungen durch:

- a) Der Vektor $\vec{x} = (-1, 1, 1)$ soll um 90° im Rechtsschraubensinn um die Achse $\vec{a} = (1, 0, 1)$ gedreht werden. Geben Sie die Koordinaten des gedrehten Vektors an.
- b) Der Vektor $\vec{x} = (1, 0, 0)$ soll um 60° im Rechtsschraubensinn um die Achse $\vec{a} = (1, 1, 1)$ gedreht werden. Geben Sie die Koordinaten des gedrehten Vektors an.
- c) Der Vektor $\vec{x} = (1, 0, -1)$ soll um 120° im Rechtsschraubensinn um die Achse $\vec{a} = (1, 1, 1)$ gedreht werden. Geben Sie die Koordinaten des gedrehten Vektors an.

Berechnen Sie jeweils die Skalarprodukte vom gedrehten und ungedrehten Vektor und geben Sie die Grösse der vom gedrehten und ungedrehten Vektor eingeschlossenen Winkel an. Wann sind die identisch mit den Drehwinkeln?

Aufgabe 2) Es seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ die Standardbasisvektoren im \mathbb{R}^3 . Geben Sie die Matrix-Darstellungen der Drehungen

$$R(\vec{e}_1, \alpha), \quad R(\vec{e}_2, \beta), \quad R(\vec{e}_3, \gamma)$$

explizit an. Benutzen Sie dazu wieder die allgemeine Formel (3.26) aus dem week7, das war

$$R(\vec{n}, \varphi) \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \cos \varphi [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] + \sin \varphi [\vec{n} \times \vec{x}] \quad (1)$$

und berechnen Sie die Skalar- und Vektorprodukte $\vec{x} \cdot \vec{n}$ und $\vec{n} \times \vec{x}$ für $\vec{n} \in \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und $\vec{x} = (x, y, z)$. Schreiben Sie sich dann die Ausdrücke für $R(\vec{e}_1, \alpha) \vec{x}$, $R(\vec{e}_2, \beta) \vec{x}$ und $R(\vec{e}_3, \gamma) \vec{x}$ explizit hin und vereinfachen Sie sie soweit wie möglich, daraus lässt sich dann die Matrix-Darstellung ablesen.

Aufgabe 3) Es sei (siehe Aufgabe 3 vom Ü-Blatt 6)

$$L_{\vec{n}} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & +n_2 \\ +n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & +n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Matrix-Darstellung für das Vektorprodukt, $L_{\vec{n}} \vec{x} = \vec{n} \times \vec{x}$. Zeigen Sie:

a) Es gilt

$$L_{\vec{n}}^2(\vec{x}) = L_{\vec{n}}(L_{\vec{n}}\vec{x}) = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{x}) = \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{x}) - \vec{x}$$

Diese Gleichung ist äquivalent zur Matrix-Darstellung

$$L_{\vec{n}}^2 = \begin{pmatrix} n_1^2 - 1 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 - 1 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} - Id$$

b) Weiterhin gilt

$$L_{\vec{n}}^3(\vec{x}) = -\vec{n} \times \vec{x} = -L_{\vec{n}}\vec{x}$$

oder ohne das \vec{x} geschrieben,

$$L_{\vec{n}}^3 = -L_{\vec{n}}$$

c) Folgern Sie: Für alle $k \geq 1$ gilt

$$L_{\vec{n}}^{2k+1} = (-1)^k L_{\vec{n}}, \quad L_{\vec{n}}^{2k+2} = (-1)^k L_{\vec{n}}^2$$

d) Zeigen Sie schliesslich: Es gilt

$$e^{\varphi L_{\vec{n}}} = R(\vec{n}, \varphi)$$

mit dem $R(\vec{n}, \varphi)$ gegeben durch (1) in Aufgabe 2. Benutzen Sie dazu wieder die Potenzreihenentwicklungen von \sin , \cos und \exp und zerlegen Sie die Exponentialreihe nach geraden und ungeraden Potenzen.

| Farbcodierung Aufgaben: | |
|-------------------------|--|
| rote Aufgaben | notwendig zum Bestehen der Klausur |
| blaue Aufgaben | nur wenn Sie ein 'sehr gut' haben wollen |
| grüne Aufgaben | zur Vertiefung, nicht klausurrelevant |