

**6. Übungsblatt zur Vorlesung
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB**

Aufgabe 1) Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Skizzieren Sie \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} im \mathbb{R}^3 .

b) Berechnen Sie die von den Vektoren

b1) \vec{a} und \vec{b}

b2) \vec{a} und \vec{c}

b3) \vec{b} und \vec{c}

eingeschlossenen Winkel.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.

d) Berechnen Sie das Volumen des von den Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Spats.

Aufgabe 2) Es seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ beliebige Vektoren im \mathbb{R}^3 . Verifizieren Sie die folgende Identität,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

indem Sie die linke und die rechte Seite einfach gemäß Definitionen explizit durch die Vektorkomponenten a_i, b_j und c_k ausdrücken.

Aufgabe 3) Es sei

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

ein vorgegebener Vektor. Dann können wir die Zuordnung $\vec{x} \rightarrow \vec{a} \times \vec{x}$ als eine lineare Abbildung $L_{\vec{a}}$ im \mathbb{R}^3 auffassen,

$$L_{\vec{a}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\vec{x} \rightarrow L_{\vec{a}} \vec{x} := \vec{a} \times \vec{x}$$

Geben Sie die Matrix-Darstellung dieser linearen Abbildung an. Gesucht ist also eine 3×3 Matrix A , so dass

$$\vec{a} \times \vec{x} = A \vec{x}$$

erfüllt ist für beliebige Vektoren \vec{x} im \mathbb{R}^3 .

Aufgabe 4) Eine Drehung mit Winkel α um die z - oder \vec{e}_3 -Achse im \mathbb{R}^3 lässt sich realisieren durch die Matrix

$$D_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Drehen Sie die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} aus Aufgabe 1 um 45° um die z -Achse und nennen Sie die gedrehten Vektoren etwa \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} , also

$$\vec{u} = D_3\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{a}, \quad \vec{v} = D_3\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{b}, \quad \vec{w} = D_3\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{c}$$

Geben Sie \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} explizit an.

- b) Bearbeiten Sie dann noch einmal die Aufgabenteile (b-d) aus Aufgabe 1, jetzt mit den gedrehten Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} . Vergleichen Sie Ihre Resultate mit denen aus der ersten Aufgabe.

Aufgabe 5) Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$ im \mathbb{R}^n ist definiert durch

$$(\vec{x}, \vec{y}) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{j=1}^n x_j y_j$$

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine beliebige $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie:

- a) Es gilt

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, A^T\vec{y}) \tag{1}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{a}_1 & \dots & \vec{a}_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} - & \vec{a}_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \vec{a}_n & - \end{pmatrix}$$

oder $[A^T]_{i,j} = a_{j,i}$ falls $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$. A^T heisst die transponierte Matrix von A .

- b) Für beliebige $n \times n$ Matrizen A und B gilt die Identität

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Farbcodierung Aufgaben:	
rote Aufgaben	notwendig zum Bestehen der Klausur
blaue Aufgaben	nur wenn Sie ein 'sehr gut' haben wollen
grüne Aufgaben	zur Vertiefung, nicht klausurrelevant