Hochschule RheinMain SS 2026
Prof. Dr. D. Lehmann

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $c \neq 0$ und $d \neq 0$. Weiter seien

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}$$

Wann ist die Gleichung

$$A\,B = B\,A$$

erfüllt? Geben Sie alle möglichen a, b, c, d an.

Aufgabe 2) Es sei D die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

und die Matrix A sei gegeben durch

$$A = B\,D\,B^{-1}$$

wobei B eine beliebige invertierbare Matrix ist.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie weiter: Für beliebige Potenzen A^n gilt

$$A^n = B\,D^n\,B^{-1}$$

c) Folgern Sie dann, wieder mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der e-Funktion:

$$e^{tA} = B\,e^{tD}\,B^{-1} = B \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} B^{-1}$$

Für diagonalisierbare Matrizen kann man das Matrix-Exponential also leicht berechnen. Für $n \times n$ Matrizen geht das dann völlig analog.

Aufgabe 3) Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie die folgende Identität:

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ +\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie dazu die geraden und ungeraden Potenzen A^{2k} und A^{2k+1} und benutzen Sie die Potenzreihen von exp, cos und sin.

Aufgabe 4) Die sogenannten Hyperbelfunktionen $\sinh x$ und $\cosh x$, sinus hyperbolicus und cosinus hyperbolicus, sind definiert durch

$$\cosh x \;:=\; \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,, \qquad \sinh x \;:=\; \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{1}$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung der e-Funktion:

$$\cosh x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \;=\; 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{2}$$

$$\sinh x \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \;=\; x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \tag{3}$$

Aufgabe 5) Es sei

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie die folgende Identität:

$$e^{tA} \;=\; \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie dazu wieder die geraden und ungeraden Potenzen A^{2k} und A^{2k+1} und benutzen Sie die Potenzreihen von exp, cosh und sinh.

Farbcodierung Aufgaben:	
rote Aufgaben	notwendig zum Bestehen der Klausur
blaue Aufgaben	nur wenn Sie ein ‘sehr gut’ haben wollen
grüne Aufgaben	zur Vertiefung, nicht klausurrelevant