4. Übungsblatt zur Vorlesung
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Welche der 9 möglichen Matrixprodukte

$$M_1 \cdot M_2 \quad \text{mit} \quad M_1, M_2 \in \{A, B, C\}$$

machen Sinn? Berechnen Sie alle diese Matrixprodukte.

Aufgabe 2) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finden Sie eine Matrix M mit

$$M\,A = Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Machen Sie dazu den Ansatz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie dann, dass dieses M dann auch automatisch die Gleichung

$$A\,M = Id$$

erfüllt. M ist also das Inverse von A, $M = A^{-1}$.

Aufgabe 3) Gegeben seien die Drehmatrizen

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Vektoren

$$\vec{w}_j \;:=\; D\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\vec{v}_j \;, \qquad j \;=\; 1,2,3$$

Skizzieren Sie dann die $\vec{v}_j$ und die $\vec{w}_j$ in der (x,y)-Ebene.

b) Zeigen Sie die Identität

$$D(\alpha)\,D(\beta) \;=\; D(\alpha+\beta)$$

indem Sie die trigonometrischen Additionstheoreme benutzen.

Aufgabe 4) Finden Sie eine 2×2 Matrix A, die nicht die Nullmatrix ist, also

$$A \;\neq\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

für die aber gilt:

$$A^2 \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Farbcodierung Aufgaben:	
rote Aufgaben	notwendig zum Bestehen der Klausur
blaue Aufgaben	nur wenn Sie ein ‘sehr gut’ haben wollen
grüne Aufgaben	zur Vertiefung, nicht klausurrelevant