Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2026

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke und geben Sie das Resultat in der Form $x + iy$ an:

a) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{100}$ **b)** $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{101}$ **c)** $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{102}$ **d)** $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{103}$

e) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{300}$ **f)** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{301}$ **g)** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{302}$ **h)** $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{303}$

Aufgabe 2) Wir betrachten die komplexe Gleichung ($z \in \mathbb{C}$)

$$z^3 - 1 = 0 \tag{1}$$

a) Geben Sie alle komplexen Lösungen von (1) an, sowohl in kartesischer als auch in Polar-Darstellung, und skizzieren Sie sie in der komplexen Ebene.

b) Es seien z_1, z_2 und z_3 Ihre Lösungen aus Teil (a). Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen: es gilt

$$(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) = z^3 - 1$$

Aufgabe 3) Gegeben seien die zwei harmonischen Schwingungen ($A, B \in \mathbb{R}^+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x_A(t) &= A \sin(\omega t + \alpha) \\ x_B(t) &= B \sin(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie: Die Summe

$$x_C(t) := x_A(t) + x_B(t)$$

ist dann wieder eine harmonische Schwingung und kann geschrieben werden als

$$x_C(t) = C \sin(\omega t + \gamma)$$

mit geeigneten reellen Konstanten $C \in \mathbb{R}^+$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Leiten Sie die Formeln her, mit denen man das C und das γ aus den A, B und den α, β berechnen kann. Gehen Sie dazu ins Komplexe und betrachten Sie die Gleichung

$$e^{i\omega t} \left\{ A\, e^{i\alpha} + B\, e^{i\beta} \right\} = A\, e^{i(\omega t+\alpha)} + B\, e^{i(\omega t+\beta)} = C\, e^{i(\omega t+\gamma)} = C\, e^{i\gamma}\, e^{i\omega t}$$

von der Sie dann den Imaginärteil nehmen können.

b) Berechnen Sie das $x_C(t)$ für die beiden harmonischen Schwingungen

$$\begin{aligned} x_A(t) &= A \sin t \\ x_B(t) &= B \sin(t + \pi/2) = B \cos t \end{aligned}$$

Farbcodierung Aufgaben:	
rote Aufgaben	notwendig zum Bestehen der Klausur
blaue Aufgaben	nur wenn Sie ein 'sehr gut' haben wollen
grüne Aufgaben	zur Vertiefung, nicht klausurrelevant