

12. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimmen Sie alle reellen Eigenwerte von A .
- b) Geben Sie eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren an.
- c) Überprüfen Sie die Identität $A = V D V^T$ durch explizites Nachrechnen. Dabei ist V die Matrix der normierten Eigenvektoren und D die Diagonalmatrix mit den Eigenwerten.

Aufgabe 2) Die Dreh-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

sind komplex diagonalisierbar, es gibt eine unitäre Matrix $U \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ und komplexe Eigenwerte λ_1 und λ_2 so dass

$$A = U \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} U^* \quad (1)$$

mit der adjungierten Matrix $U^* = \bar{U}^T$. Geben Sie das U und die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 an und überprüfen Sie die Identität (1) durch explizites Nachrechnen.

Aufgabe 3) Nicht jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar, sondern man kann nur sagen, dass jede reelle symmetrische Matrix diagonalisierbar ist, es gibt aber komplexe symmetrische Matrizen, die nicht diagonalisierbar sind. Zeigen Sie dazu, dass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

nicht diagonalisierbar ist, weder reell noch komplex diagonalisierbar. Bestimmen Sie dazu alle Eigenwerte und Eigenvektoren. Zeigen Sie weiterhin, dass gilt:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4) Die quadratischen Matrizen $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $W \in \mathbb{R}^{m \times m}$ seien gegeben durch

$$V = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{w}_1 & \cdots & \vec{w}_m \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Es sei etwa $m \leq n$ und die rechteckige Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sei gegeben durch

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie: Das Matrixprodukt WDV^T können wir auch folgendermaßen schreiben:

$$WDV^T = \sum_{k=1}^m \lambda_k \begin{pmatrix} | \\ \vec{w}_k \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \vec{v}_k & - \end{pmatrix} \quad (2)$$

wobei auf der rechten Seite von (2) jeweils das Produkt der $m \times 1$ Matrix $\begin{pmatrix} | \\ \vec{w}_k \\ | \end{pmatrix}$ mit der $1 \times n$ Matrix $\begin{pmatrix} - & \vec{v}_k & - \end{pmatrix}$ zu nehmen ist.

Farbcodierung Aufgaben:	
rote Aufgaben	notwendig zum Bestehen der Klausur
blaue Aufgaben	nur wenn Sie ein 'sehr gut' haben wollen
grüne Aufgaben	zur Vertiefung, nicht klausurrelevant