

Lösungen 9. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) a) Wir addieren etwa die 3. Spalte (S3) auf die 1. Spalte (S1) und bekommen

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &\stackrel{S1 \rightarrow S1+S3}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1) \cdot 2 \cdot [1 - (-1)] = -4 \end{aligned}$$

b) Gemäss Formel (4.36) aus dem week9 ist die Inverse von A gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} M^T$$

mit

$$M := \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

Dabei sind die A_i , B_j und C_k durch die folgenden Determinanten gegeben:

$$A_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = + \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$A_2 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$A_3 = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = + \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

und

$$B_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$B_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = +\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$B_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

und

$$C_1 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = +\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$C_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

$$C_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = +\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

Also,

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} M^T = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2) a) Wir erzeugen etwa Nullen in der ersten Spalte, indem wir die erste Zeile (Z1) mit -2, -3 und -4 multiplizieren und auf die 2., 3. und 4. Zeile (Z2,Z3,Z4) draufaddieren:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} &\stackrel{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 - 2 \cdot Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - 3 \cdot Z_1 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 - 4 \cdot Z_1}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -4 & -8 & -10 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -8 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{pmatrix} \\
&= (-1)^3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 8 & 10 \\ 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 2 \cdot 5 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\
&\stackrel{Z_1 \rightarrow Z_1 - Z_2}{=} -10 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = -10 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -10 \cdot [12 - 10] = -20 .
\end{aligned}$$

b) Wir erzeugen wieder Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} &\stackrel{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_1 \\ Z_4 \rightarrow Z_4 - Z_1}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \\ 0 & 3 & 15 & 63 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \\ 3 & 15 & 63 \end{pmatrix} \\
&= 2 \cdot 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 13 \\ 1 & 5 & 21 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{Z_2 \rightarrow Z_2 - Z_1 \\ Z_3 \rightarrow Z_3 - Z_1}}{=} 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 14 \end{pmatrix} = 6 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 14 \end{pmatrix} \\
&= 6 \cdot [14 - 12] = 12 .
\end{aligned}$$

c) *Standard-Lösung:* Wir erzeugen Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} &\stackrel{Z_2 \rightarrow Z_2 - 3 \cdot Z_1}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \\
&= (-2) \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -2 \cdot [40 - 42] = +4 .
\end{aligned}$$

Alternative Lösungsmöglichkeit: Wir benutzen die Formel zur Berechnung von Block-Determinanten aus Aufgabe 4: Für eine allgemeine Block-Matrix von der Form (siehe dazu auch Aufgabe 4)

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

mit $B = 0$ oder $C = 0$ (das heisst genauer, B eine $k \times (n - k)$ Matrix mit lauter Nullen oder C eine $(n - k) \times k$ Matrix mit lauter Nullen) gilt die allgemeine Formel:

$$\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D$$

Also können wir schreiben:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = [4 - 6] \cdot [40 - 42] = +4 \ .$$

Aufgabe 4) a) Mit $k = n - k = 2$ bekommen wir für die Determinante aus Aufgabe 2a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Formel (1) taucht ein A^{-1} auf, berechnen wir das zunächst: Wir benutzen die Formel aus Aufgabe 3 vom Ü-Blatt 8, das war

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Also,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Das Matrixprodukt $CA^{-1}B$ ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} CA^{-1}B &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

so dass

$$\begin{aligned} D - CA^{-1}B &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 23 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 & 16 \\ 16 & 23 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir dann mit der Formel (1)

$$\begin{aligned} \det M &= \det A \cdot \det[D - CA^{-1}B] = -3 \cdot \det \left[-\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \right] \\ &= -3 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3} [40 - 25] = -\frac{4}{3} \cdot 15 = -20 \end{aligned}$$

und das stimmt mit dem Resultat aus Aufgabe 2a überein so wie es sein soll.

b) Für $k = 1$ und $n - k = 3$ ergibt sich für die Matrix aus Aufgabe 2b

$$A = 1, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

Das Matrixprodukt $CA^{-1}B$ ist dann gegeben durch

$$CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Matrix $D - CA^{-1}B$ erhalten wir dann

$$D - CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \\ 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \\ 3 & 15 & 63 \end{pmatrix}$$

und mit der Formel (1) bekommen wir dann

$$\det M = \det A \cdot \det[D - CA^{-1}B] = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \\ 3 & 15 & 63 \end{pmatrix}$$

Auf diese 3×3 Matrix waren wir in der Lösung zu Aufgabe 2b, auf der Seite 3, auch schon gekommen, also müssen die Resultate damit auch übereinstimmen:

$$\det M = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 26 \\ 3 & 15 & 63 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Aufgabe 2b}}{=} 12.$$

c, d) Für $B = 0$ oder $C = 0$ sind die Matrixprodukte $CA^{-1}B$ und $BD^{-1}C$ beide gleich Null oder genauer, gleich der Null-Matrix, so dass

$$\det M = \det A \cdot \det[D - CA^{-1}B] = \det A \cdot \det[D - 0] = \det A \cdot \det D$$

$$\det M = \det D \cdot \det[A - BD^{-1}C] = \det D \cdot \det[A - 0] = \det D \cdot \det A.$$