

Lösungen 8. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Wir schreiben

$$R = \frac{1}{3} \cdot A$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Da die Determinanten-Funktion in jeder Spalte linear ist, gilt dann mit $\lambda := 1/3$:

$$\begin{aligned} \det R &= \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \lambda \vec{a}_1 & \lambda \vec{a}_2 & \lambda \vec{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{a}_1 & \lambda \vec{a}_2 & \lambda \vec{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 \cdot \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \lambda \vec{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \lambda^3 \cdot \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{27} \cdot \det A \end{aligned}$$

Die Determinante von A berechnen wir mit der Regel von Sarrus (das hätten wir natürlich auch gleich mit dem R machen können, aber dann hätten wir Brüche gehabt, so sind die Zahlen glatter):

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &\quad - 2 \cdot 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 \\ &= 8 - 1 + 8 + 4 + 4 + 4 = 27 \end{aligned}$$

und damit

$$\det R = \frac{1}{27} \cdot 27 = 1$$

Weiterhin bekommen wir die folgenden Matrix-Produkte:

$$\begin{aligned} RR^T &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R^T R &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id \end{aligned}$$

und damit gilt

$$R^T = R^{-1} .$$

Aufgabe 2) Mit der Regel von Sarrus bekommen wir

$$\det R_1(\varphi) = \cos^2 \varphi + 0 + 0 - 0 - 0 - 1 \cdot (-\sin \varphi) \cdot \sin \varphi = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$\det R_2(\varphi) = \cos^2 \varphi + 0 + 0 - \sin \varphi \cdot 1 \cdot (-\sin \varphi) - 0 - 0 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$\det R_3(\varphi) = \cos^2 \varphi + 0 + 0 - 0 - (-\sin \varphi) \cdot \sin \varphi \cdot 1 - 0 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

Weiterhin haben wir die folgenden Matrix-Produkte:

$$\begin{aligned} R_1(\varphi)^T R_1(\varphi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & +\sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & +\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi \\ 0 & -\sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2(\varphi)^T R_2(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ +\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & +\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & 0 & \cos \varphi \sin \varphi - \sin \varphi \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi \sin \varphi & 0 & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3(\varphi)^T R_3(\varphi) &= \begin{pmatrix} \cos \varphi & +\sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ +\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi + \sin \varphi \cos \varphi & 0 \\ -\sin \varphi \cos \varphi + \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Id
\end{aligned}$$

Aufgabe 3) Wir bekommen

$$\begin{aligned}
AA^{-1} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} ad - bc & -ab + ba \\ cd - dc & -cb + da \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
A^{-1}A &= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

also gilt tatsächlich

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4) Berechnen wir zunächst die Matrix D^{-1} mit der Formel aus Aufgabe 3. Den Vorfaktor $1/3$ invertieren wir separat und schreiben

$$\begin{aligned}
D^{-1} &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\
&= 3 \cdot \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & +1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit Formeln (5) und (6) bekommen wir dann:

$$e = [a - \vec{b} D^{-1} \vec{c}]^{-1} = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3} (-1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

Wir klammern ein Faktor von $1/3$ aus, den wir separat invertieren, und schreiben

$$\begin{aligned}
 e &= 3 \cdot \left[2 - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\
 &= 3 \cdot \left[2 - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\
 &= 3 \cdot \left[2 - \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\
 &= 3 \cdot \left[2 - \left(-2\frac{1}{2}\right) \right]^{-1} = 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

das stimmt schonmal. Weiterhin bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \vec{f} &= -e \vec{b} D^{-1} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{2}{9} \begin{pmatrix} -3 & 3/2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} -1 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

das stimmt auch. Der 2×1 Block $\vec{g}$ berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
 \vec{g} &= -D^{-1} \vec{c} e = -\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{2}{3} \\
 &= -\frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{9} \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

und das ist ebenfalls korrekt. Schliesslich,

$$\begin{aligned}
 H &= [D - \vec{c} a^{-1} \vec{b}]^{-1} = \left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{3}{2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\
 &= 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{3}{2} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\
 &= 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\
 &= 3 \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \right]^{-1} \\
 &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3/2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}
 \end{aligned}$$

Die Matrix, die wir invertieren müssen, ist gerade das Transponierte von der Matrix D^{-1} , die wir weiter oben berechnet hatten. Also:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \left[[D^{-1}]^T \right]^{-1}$$

Für beliebige quadratische Matrizen A gilt nun

$$[A^{-1}]^T = [A^T]^{-1}$$

Damit bekommen wir dann, wegen $[A^{-1}]^{-1} = A$,

$$H = \left[[D^{-1}]^T \right]^{-1} = \left[[D^T]^{-1} \right]^{-1} = D^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

und das ist identisch mit dem unteren rechten 2×2 Block von

$$R^{-1} = R^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

so wie es sein soll. Damit ist alles gezeigt.