

Lösungen 7. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Die allgemeine Formel lautet:

$$R(\vec{n}, \varphi) \vec{x} = (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \cos \varphi [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] + \sin \varphi [\vec{n} \times \vec{x}] \quad (1)$$

Dabei muss der Vektor $\vec{n}$, der in Richtung der Drehachse zeigt, auf 1 normiert sein,

$$\|\vec{n}\| \stackrel{!}{=} 1$$

a) Das $\vec{n}$ ist also gegeben durch

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Drehwinkel soll $\varphi = 90^\circ$ sein, also bekommen wir mit (1) unter Berücksichtigung von $\sin 90^\circ = 1$ und $\cos 90^\circ = 0$:

$$\begin{aligned} R(\vec{n}, 90^\circ) \vec{x} &= (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + 0 \cdot [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] + 1 \cdot [\vec{n} \times \vec{x}] \\ &= (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \vec{n} \times \vec{x} \\ &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berechnen wir noch den Winkel γ zwischen gedrehtem Vektor $(-1, -2, 1)/\sqrt{2} =: \vec{y}$ und ungedrehten Vektor $(-1, 1, 1) =: \vec{x}$: Es ist

$$\cos \gamma = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \frac{1}{\sqrt{3} \sqrt{6/2}} (1 - 2 + 1) / \sqrt{2} = 0$$

also

$$\gamma = 90^\circ$$

Das ist in diesem Fall identisch mit dem Drehwinkel φ , da das $\vec{x}$ senkrecht zur Drehachse ist.

b) Für die Drehachse $\vec{a} = (1, 1, 1)$ bekommen wir

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{x} = (1, 0, 0)$ bekommen wir weiter

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \vec{n} \times \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also, mit

$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} R(\vec{n}, \varphi) \vec{x} &= (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \cos \varphi [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] + \sin \varphi [\vec{n} \times \vec{x}] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =: \vec{y} \end{aligned}$$

Für den Winkel zwischen gedrehtem Vektor $\vec{y}$ und ungedrehtem Vektor $\vec{x}$ gilt wieder

$$\cos \gamma = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \frac{2/3}{\sqrt{1} \sqrt{9/3}} = \frac{2}{3}$$

und damit

$$\gamma \approx 48,19^\circ$$

c) Für die Drehachse $\vec{a} = (1, 1, 1)$ bekommen wir wie in Teil (b)

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{x} = (1, 0, -1)$ bekommen wir weiter

$$\vec{x} \cdot \vec{n} = 0, \quad \vec{n} \times \vec{x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Also, mit

$$\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} R(\vec{n}, \varphi) \vec{x} &= (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n} + \cos \varphi [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{n}) \vec{n}] + \sin \varphi [\vec{n} \times \vec{x}] \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{y} \end{aligned}$$

Für den Winkel zwischen gedrehtem Vektor $\vec{y}$ und ungedrehtem Vektor $\vec{x}$ gilt wieder

$$\cos \gamma = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \|\vec{y}\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$$

und damit

$$\gamma = 120^\circ$$

Das ist hier jetzt wieder identisch mit dem Drehwinkel, da das $\vec{x} = (1, 0, -1)$ wieder senkrecht zur Drehachse $\vec{n}$ steht, $\vec{x} \cdot \vec{n} = 0$.

Aufgabe 2) Mit $\vec{x} = (x, y, z)$ bekommen wir die folgenden Skalar- und Vektorprodukte:

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{e}_1 &= x \\ \vec{x} \cdot \vec{e}_2 &= y \\ \vec{x} \cdot \vec{e}_3 &= z \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \\ \vec{e}_2 \times \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit der allgemeinen Formel (1) bekommen wir dann

$$\begin{aligned} R(\vec{e}_1, \alpha) \vec{x} &= (\vec{x} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + \cos \alpha [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1] + \sin \alpha [\vec{e}_1 \times \vec{x}] \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \alpha \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} + \sin \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x \\ \cos \alpha y - \sin \alpha z \\ \sin \alpha y + \cos \alpha z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also,

$$R(\vec{e}_1, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Für die anderen beiden Koordinatenachsen geht das dann analog: Wir bekommen

$$\begin{aligned} R(\vec{e}_2, \beta) \vec{x} &= (\vec{x} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2 + \cos \beta [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2] + \sin \beta [\vec{e}_2 \times \vec{x}] \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \beta \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \sin \beta \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \cos \beta \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \sin \beta \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta x + \sin \beta z \\ y \\ -\sin \beta x + \cos \beta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also,

$$R(\vec{e}_2, \beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}$$

Und schliesslich:

$$\begin{aligned}
 R(\vec{e}_3, \gamma) \vec{x} &= (\vec{x} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3 + \cos \gamma [\vec{x} - (\vec{x} \cdot \vec{e}_3) \vec{e}_3] + \sin \gamma [\vec{e}_3 \times \vec{x}] \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \cos \gamma \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right] + \sin \gamma \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} + \cos \gamma \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \sin \gamma \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \gamma x - \sin \gamma y \\ \sin \gamma x + \cos \gamma y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Also,

$$R(\vec{e}_3, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3) a) Mit

$$\|\vec{n}\|^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad (2)$$

bekommen wir

$$\begin{aligned}
 L_{\vec{n}}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & +n_2 \\ +n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & +n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & +n_2 \\ +n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & +n_1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -n_3^2 - n_2^2 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & -n_3^2 - n_1^2 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & -n_2^2 - n_1^2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} n_1^2 - n_3^2 - n_2^2 - n_1^2 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - n_3^2 - n_2^2 - n_1^2 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - n_3^2 - n_2^2 - n_1^2 \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{(2)}{=} \begin{pmatrix} n_1^2 - 1 & n_2 n_1 & n_3 n_1 \\ n_1 n_2 & n_2^2 - 1 & n_3 n_2 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 - 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 L_{\vec{n}}^2 &= \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} (n_1 \ n_2 \ n_3) - Id \quad (3)
 \end{aligned}$$

Wenn wir Gleichung (3) auf ein $\vec{x}$ anwenden, bekommen wir

$$\begin{aligned}
 L_{\vec{n}}^2 \vec{x} &= L_{\vec{n}}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - Id \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{(n_1 x + n_2 y + n_3 z)}_{=\vec{n} \cdot \vec{x}} - \vec{x} = (\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} - \vec{x} \quad (4)
 \end{aligned}$$

b) Mit Teil (a) bekommen wir

$$\begin{aligned}
 L_{\vec{n}}^3 \vec{x} &= L_{\vec{n}} L_{\vec{n}}^2 \vec{x} \stackrel{(4)}{=} L_{\vec{n}} [(\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} - \vec{x}] \\
 &= \vec{n} \times [(\vec{n} \cdot \vec{x}) \vec{n} - \vec{x}] \\
 &= (\vec{n} \cdot \vec{x}) \underbrace{\vec{n} \times \vec{n}}_{=\vec{0}} - \vec{n} \times \vec{x} = -\vec{n} \times \vec{x} = -L_{\vec{n}} \vec{x}
 \end{aligned}$$

also

$$L_{\vec{n}}^3 = -L_{\vec{n}}$$

c) Mit Teil (b) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
 L_{\vec{n}}^4 &= -L_{\vec{n}}^2 \\
 L_{\vec{n}}^5 &= L_{\vec{n}} L_{\vec{n}}^4 = -L_{\vec{n}} L_{\vec{n}}^2 = -L_{\vec{n}}^3 = +L_{\vec{n}} \\
 L_{\vec{n}}^6 &= L_{\vec{n}} L_{\vec{n}}^5 = +L_{\vec{n}} L_{\vec{n}} = +L_{\vec{n}}^2 \\
 L_{\vec{n}}^7 &= L_{\vec{n}} L_{\vec{n}}^6 = +L_{\vec{n}} L_{\vec{n}}^2 = +L_{\vec{n}}^3 = -L_{\vec{n}} \\
 &\vdots \\
 L_{\vec{n}}^{2k+1} &= L_{\vec{n}} L_{\vec{n}}^{2k} = (-1)^{k-1} L_{\vec{n}} L_{\vec{n}}^2 = (-1)^k L_{\vec{n}} \\
 L_{\vec{n}}^{2k+2} &= L_{\vec{n}} L_{\vec{n}}^{2k+1} = (-1)^k L_{\vec{n}} L_{\vec{n}} = (-1)^k L_{\vec{n}}^2
 \end{aligned}$$

d) Mit der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion für Matrizen,

$$\begin{aligned}
 e^A &= Id + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^4}{4!} + \frac{A^5}{5!} + \frac{A^6}{6!} + \dots \\
 &= Id + A + \frac{A^3}{3!} + \frac{A^5}{5!} + \dots \\
 &\quad + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^4}{4!} + \frac{A^6}{6!} + \dots \\
 &= Id + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+2}}{(2k+2)!}
 \end{aligned}$$

erhalten wir mit Teil (c)

$$\begin{aligned}
e^{\varphi L_{\vec{n}}} &= Id + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi L_{\vec{n}})^{2k+1}}{(2k+1)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\varphi L_{\vec{n}})^{2k+2}}{(2k+2)!} \\
&= Id + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} L_{\vec{n}}^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2k+2}}{(2k+2)!} L_{\vec{n}}^{2k+2} \\
&\stackrel{(c)}{=} Id + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} (-1)^k L_{\vec{n}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi^{2k+2}}{(2k+2)!} (-1)^k L_{\vec{n}}^2
\end{aligned} \tag{5}$$

Wir erinnern uns an die Potenzreihenentwicklungen für sin und cos aus dem week2,

$$\begin{aligned}
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots
\end{aligned}$$

Die Sinus-Reihe haben wir in Gleichung (5) direkt da stehen, wir können schreiben

$$e^{\varphi L_{\vec{n}}} = Id + \sin \varphi L_{\vec{n}} + \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+2}}{(2k+2)!} \right] L_{\vec{n}}^2 \tag{6}$$

Die Cosinus-Reihe steht nicht direkt da, wir können aber wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\varphi^{2k+2}}{(2k+2)!} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{[k+1]-1} \frac{\varphi^{2[k+1]}}{(2[k+1])!} \stackrel{\ell=k+1}{=} \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell-1} \frac{\varphi^{2\ell}}{(2\ell)!} \\
&= - \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{\varphi^{2\ell}}{(2\ell)!} = - \sum_{\ell=0}^{\infty} (-1)^{\ell} \frac{\varphi^{2\ell}}{(2\ell)!} + (-1)^0 \frac{\varphi^{2 \cdot 0}}{(2 \cdot 0)!} \\
&= 1 - \cos \varphi
\end{aligned}$$

Wir setzen das in (6) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
e^{\varphi L_{\vec{n}}} &= Id + \sin \varphi L_{\vec{n}} + [1 - \cos \varphi] L_{\vec{n}}^2 \\
&= Id + L_{\vec{n}}^2 + \sin \varphi L_{\vec{n}} - \cos \varphi L_{\vec{n}}^2
\end{aligned}$$

Mit dem Resultat für $L_{\vec{n}}^2$ aus Teil (a),

$$L_{\vec{n}}^2(\vec{x}) = \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{x}) - \vec{x}$$

bekommen wir dann schliesslich

$$\begin{aligned}
e^{\varphi L_{\vec{n}}} \vec{x} &= (Id + L_{\vec{n}}^2) \vec{x} - \cos \varphi L_{\vec{n}}^2 \vec{x} + \sin \varphi L_{\vec{n}} \vec{x} \\
&= \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{x}) + \cos \varphi [\vec{x} - \vec{n} (\vec{n} \cdot \vec{x})] + \sin \varphi \vec{n} \times \vec{x} \\
&\stackrel{(1)}{=} R(\vec{n}, \varphi) \vec{x}
\end{aligned}$$

und die Formel ist bewiesen.