

Lösungen 6. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) a) ..wir machen ein Bild an der Tafel.

1b) In dem week6 hatten wir in Gleichung (3.8) die folgende Identität hergeleitet:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos[\angle(\vec{a}, \vec{b})]$$

wobei $\angle(\vec{a}, \vec{b})$ der von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} eingeschlossene Winkel ist. Also können wir schreiben

$$\cos[\angle(\vec{a}, \vec{b})] = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}$$

mit

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

In unserem Fall ist

$$\begin{aligned}\|\vec{a}\| &= \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ \|\vec{b}\| &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \\ \|\vec{c}\| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1\end{aligned}$$

und wir haben die folgenden Skalarprodukte:

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1\end{aligned}$$

Also bekommen wir

$$\begin{aligned}\cos[\angle(\vec{a}, \vec{b})] &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} = \frac{1}{3} \\ \cos[\angle(\vec{a}, \vec{c})] &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\|\vec{a}\| \|\vec{c}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos[\angle(\vec{b}, \vec{c})] &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\|\vec{b}\| \|\vec{c}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

und damit, wir benutzen einen Taschenrechner für den arccos,

$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,53^\circ$$

$$\angle(\vec{a}, \vec{c}) = \angle(\vec{b}, \vec{c}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,74^\circ .$$

1c) Der Flächeninhalt A des von den Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms, das hatten wir uns in Gleichung (3.9) in dem week6 überlegt, ist gegeben durch

$$A = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

Wir bekommen mit der Definition für das Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1 \\ -1 - 1 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} .$$

1d) Das Volumen V für den Spat hatten wir uns in Gleichung (3.10) in dem week6 überlegt, es ist gegeben durch

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$$

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ haben wir gerade in Teil (c) berechnet, wir bekommen damit

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$$

und erhalten das Volumen

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |2| = 2 .$$

Aufgabe 2) Wir bekommen

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_2 c_3 - b_3 c_2 \\ b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 \end{pmatrix} \\ &= a_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2 (b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3 (b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 \\ &= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\&= (a_2 b_3 - a_3 b_2) c_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) c_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) c_3 \\&= a_2 b_3 c_1 - a_3 b_2 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 + a_1 b_2 c_3 - a_2 b_1 c_3 \\&= a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1\end{aligned}$$

und das stimmt mit dem Resultat für $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ überein.

Aufgabe 3) Nach Definition des Vektorproduktes gilt

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix}$$

Die allgemeine Definition von Matrix A angewendet auf Vektor \vec{x} war in Gleichung (2.15) in dem week4 angegeben. Damit können wir den Ausdruck von $\vec{a} \times \vec{x}$ dann auch folgendermassen schreiben:

$$\vec{a} \times \vec{x} = \begin{pmatrix} a_2 x_3 - a_3 x_2 \\ a_3 x_1 - a_1 x_3 \\ a_1 x_2 - a_2 x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A \vec{x}$$

mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4) a) Wegen

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist

$$D_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Damit bekommen wir die folgenden gedrehten Vektoren:

$$\vec{u} = D_3\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = D_3\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w} = D_3\left(\frac{\pi}{4}\right) \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4b) Wir bekommen die folgenden Werte:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{0^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

das sind dieselben Werte wie in Aufgabe 1. Die Skalarprodukte sind

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \cdot (-\sqrt{2}) + \sqrt{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \cdot 0 + \sqrt{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (-\sqrt{2}) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

das sind ebenfalls dieselben Werte wie in Aufgabe 1. Also müssen dann auch die Winkel dieselben sein:

$$\cos[\angle(\vec{u}, \vec{v})] = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{1}{3}$$

$$\cos[\angle(\vec{u}, \vec{w})] = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| \|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cos[\angle(\vec{v}, \vec{w})] = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und wie in Aufgabe 1,

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{1}{3} \approx 70,53^\circ$$

$$\angle(\vec{u}, \vec{w}) = \angle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,74^\circ .$$

Für den Flächeninhalt des Parallelogramms und das Volumen des Spats sollte dann auch dasselbe rauskommen, rechnen wir das explizit nach:

$$A = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$$

mit

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-\sqrt{2}) - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - \sqrt{2}(-\sqrt{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

und damit

$$A = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

das ist dasselbe Resultat wie in Aufgabe 1. Und schliesslich

$$V = |(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}|$$

mit

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

das ist ebenfalls dasselbe Resultat wie in Aufgabe 1.

Aufgabe 5) a) Nach Definition ist

$$(A\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^n [A\vec{x}]_i y_i$$

mit

$$[A\vec{x}]_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$$

Also,

$$\begin{aligned} (A\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{i=1}^n [A\vec{x}]_i y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j y_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} x_j y_i \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{i,j} y_i = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n [A^T]_{j,i} y_i = \sum_{j=1}^n x_j [A^T \vec{y}]_j \\ &= (\vec{x}, A^T \vec{y}) \end{aligned}$$

5b) Nach Teil (a) gilt

$$([AB]\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, [AB]^T \vec{y})$$

Andererseits gilt ebenfalls nach Teil (a)

$$(AB\vec{x}, \vec{y}) = (B\vec{x}, A^T \vec{y}) = (\vec{x}, B^T A^T \vec{y})$$

und damit für beliebige Vektoren \vec{x} und \vec{y}

$$(\vec{x}, [AB]^T \vec{y}) = (\vec{x}, B^T A^T \vec{y}) \quad (1)$$

Damit müssen dann auch die Matrixelemente von $[AB]^T$ und $B^T A^T$ übereinstimmen, denn:
Zunächst mal gilt für beliebige Matrizen $M = (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$(\vec{x}, M \vec{y}) = \sum_{k=1}^n x_k [M \vec{y}]_k = \sum_{k=1}^n x_k \sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} y_\ell = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} x_k y_\ell \quad (2)$$

Jetzt wählen wir für \vec{x} den i-ten Standardbasisvektor mit einer 1 an der i-ten Stelle und sonst nur Nullen, $\vec{x} = \vec{e}_i$, und für \vec{y} den j-ten Standardbasisvektor, $\vec{y} = \vec{e}_j$. Diese Vektoren hatten wir in dem week4 in den Gleichungen (2.6) bis (2.8) definiert,

$$\vec{e}_i = (\delta_{i,k})_{k=1,\dots,n}, \quad \vec{e}_j = (\delta_{j,k})_{k=1,\dots,n} \quad (3)$$

mit dem 'Kronecker-Delta' $\delta_{i,j}$ gegeben durch

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Wir erhalten dann

$$(\vec{e}_i, M \vec{e}_j) \stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} [\vec{e}_i]_k [\vec{e}_j]_\ell \stackrel{(3)}{=} \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} \delta_{i,k} \delta_{j,\ell} = m_{i,j}$$

Also, wenn wir in Gleichung (1) $\vec{x} = \vec{e}_i$ und $\vec{y} = \vec{e}_j$ wählen, bekommen wir

$$\left[[AB]^T \right]_{i,j} = (\vec{e}_i, [AB]^T \vec{e}_j) = (\vec{e}_i, B^T A^T \vec{e}_j) = \left[B^T A^T \right]_{i,j}$$

die Matrizen stimmen elementweise überein und sind damit identisch,

$$[AB]^T = B^T A^T .$$