Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2026

Lösungen 5. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Wir bekommen die folgenden Matrixprodukte:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cdot 0 + 0\cdot d & a\cdot c + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + b\cdot d & 0\cdot c + b\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ac \\ bd & 0 \end{pmatrix} \\ BA &= \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot a + c\cdot 0 & 0\cdot 0 + c\cdot b \\ d\cdot a + 0\cdot 0 & d\cdot 0 + 0\cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bc \\ ad & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Also ist die Gleichung $AB = BA$ äquivalent zur Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & ac \\ bd & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bc \\ ad & 0 \end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} ac &= bc \\ bd &= ad \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung c und d ungleich Null sind, können wir die beiden Gleichungen jeweils durch das c und durch das d dividieren und bekommen

$$\begin{aligned} a &= b \\ b &= a \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung dann redundant ist. Also die einzige Bedingung lautet

$$a = b$$

und die Matrix A ist dann ein Vielfaches der Identitätsmatrix,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a \cdot Id\ .$$

Aufgabe 2) **a)** Wir haben die Matrixprodukte

$$D^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D^3 &= D^2 \cdot D = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{pmatrix} \\ &\ \vdots \\ D^n &= D^{n-1} \cdot D = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion aus dem week2,

$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;=\; 1 \,+\, x \,+\, \frac{x^2}{2!} \,+\, \frac{x^3}{3!} \,+\, \frac{x^4}{4!} \,+\, \cdots$$

für Matrizen ist das dann

$$e^D \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{n!} \;=\; Id \,+\, D \,+\, \frac{D^2}{2!} \,+\, \frac{D^3}{3!} \,+\, \frac{D^4}{4!} \,+\, \cdots$$

also die reelle Zahl $x^0 = 1$ ganz am Anfang muss man durch die Einheitsmatrix oder Identitätsmatrix $D^0 := Id$ ersetzen, das gehört zur Definition der Exponentialfunktion für Matrizen, bekommen wir:

$$\begin{aligned}
e^{tD} \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tD)^n}{n!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, D^n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{t^n}{n!}\,\lambda_1^n & 0 \\ 0 & \frac{t^n}{n!}\,\lambda_2^n \end{pmatrix} \\
&=\; \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,\lambda_1^n & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\,\lambda_2^n \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_1)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t\lambda_2)^n}{n!} \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2b) Mit

$$A \;=\; B\,D\,B^{-1}$$

bekommen wir mit $B^{-1}\,B = Id$ und $Id\,D = D\,Id = D$:

$$\begin{aligned}
A^2 \;&=\; B\,D\,\underbrace{B^{-1}\,B}_{=\,Id}\,D\,B^{-1} \;=\; B\,D\,Id\,D\,B^{-1} \;=\; B\,D^2\,B^{-1} \\
A^3 \;=\; A^2 \cdot A \;&=\; B\,D^2\,\underbrace{B^{-1}\,B}_{=\,Id}\,D\,B^{-1} \;=\; B\,D^2\,Id\,D\,B^{-1} \;=\; B\,D^3\,B^{-1} \\
&\;\;\vdots \\
A^n \;=\; A^{n-1} \cdot A \;&=\; B\,D^{n-1}\,B^{-1}\,B\,D\,B^{-1} \;=\; B\,D^{n-1}\,Id\,D\,B^{-1} \;=\; B\,D^n\,B^{-1}\,.
\end{aligned}$$

2c) Mit den Resultaten aus Teil (a) und (b) und der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion bekommen wir:

$$\begin{aligned}
e^{tA} \;&=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, A^n \;\overset{(2b)}{=}\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}\, B\,D^n\,B^{-1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} B\,\frac{t^n}{n!}\,D^n\,B^{-1} \\
&=\; B \left[\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tD)^n}{n!} \,\right] B^{-1} \;=\; B\,e^{tD}\,B^{-1} \;\overset{(2a)}{=}\; B \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} B^{-1}\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3) Mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

bekommen wir die folgenden Potenzen:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$$

und damit

$$\begin{aligned} A^{2k} &= (A^2)^k = (-Id)^k = (-1)^k\, Id^k = (-1)^k\, Id \\ A^{2k+1} &= A^{2k}\cdot A = (-1)^k\, Id\cdot A = (-1)^k\, A \end{aligned}$$

Mit der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion bekommen wir dann:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}A^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}A^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}A^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\, Id + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}(-1)^k\, A \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an die Potenzreihen von cos und sin aus dem week2,

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots \\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots \end{aligned}$$

Damit bekommen wir dann:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}\right] Id + \left[\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right] A \\ &= \cos t\cdot Id + \sin t\cdot A = \cos t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\sin t \\ \sin t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 4) Wir haben

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \\ e^{-x} &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots \end{aligned}$$

Wenn wir die beiden Gleichungen addieren, heben sich die ungerade Potenzen weg und wenn wir von der ersten Gleichung die zweite subtrahieren, heben sich die geraden Potenzen weg. Also:

$$
\begin{aligned}
e^x + e^{-x} &= 2\left\{ 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \right\} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
e^x - e^{-x} &= 2\left\{ x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \right\} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}
\end{aligned}
$$

Wenn wir dann diese beiden Gleichungen noch durch 2 teilen, ergeben sich die angegebenen Formeln für sinh und cosh.

Aufgabe 5) Wir können im wesentlichen die Lösung von Aufgabe 3 übernehmen: Mit

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
$$

bekommen wir die folgenden Potenzen:

$$
A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id
$$

und damit

$$
\begin{aligned}
A^{2k} &= (A^2)^k = Id^k = Id \\
A^{2k+1} &= A^{2k} \cdot A = Id \cdot A = A
\end{aligned}
$$

Mit der Potenzreihenentwicklung der Exponentialfunktion bekommen wir dann:

$$
\begin{aligned}
e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} A^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} Id + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} A
\end{aligned}
$$

Die Potenzreihen, die wir bekommen haben, sind jetzt genau die Potenzreihen von cosh und sinh aus Aufgabe 4, also:

$$
\begin{aligned}
e^{tA} &= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \right] Id + \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] A \\
&= \cosh t \cdot Id + \sinh t \cdot A = \cosh t \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sinh t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cosh t & 0 \\ 0 & \cosh t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sinh t \\ \sinh t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und die Formel ist bewiesen.