Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2026

Lösungen 4. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Die folgenden Matrixprodukte machen Sinn:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2) Mit dem Ansatz

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

bekommen wir

$$M\,A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also muss gelten

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ c &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} a+b &= 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a = -1 \\ c+d &= 1 \quad \Rightarrow \quad d = 1-c = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Matrixprodukt AM berechnet sich dann zu

$$AM = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$$

Da kommt also auch die Einheitsmatrix oder die Identitätsmatrix, deshalb das Id, raus, also gilt $AM = MA = Id$ und damit ist M das Inverse von A, $M = A^{-1}$.

Aufgabe 3) Mit

$$D(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

bekommen wir offensichtlich

$$D(\tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

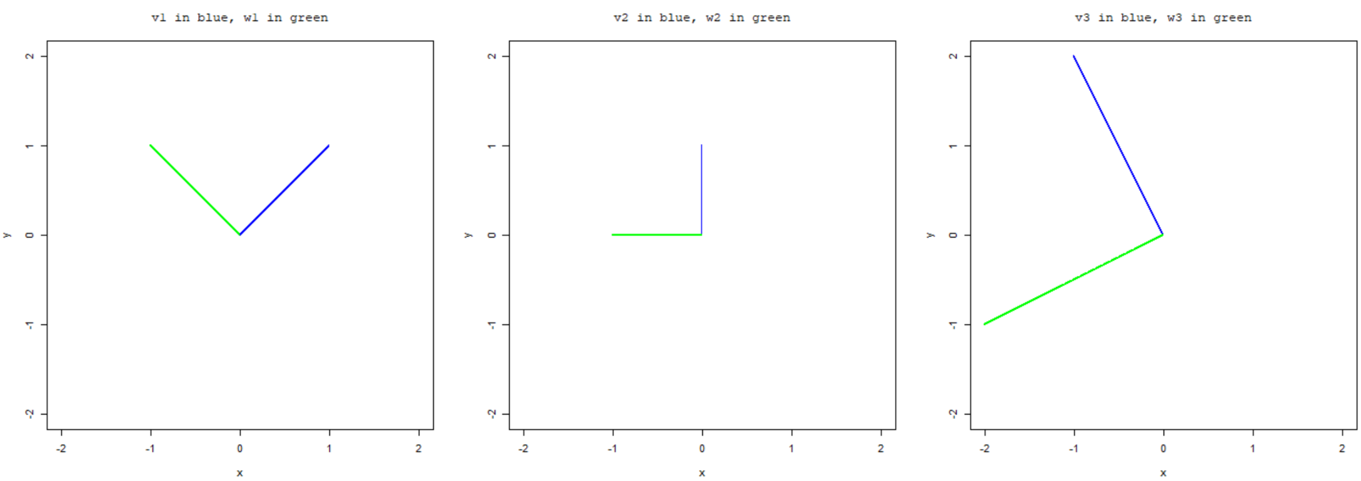
und damit

$$\vec{w}_1 = D(\tfrac{\pi}{2})\,\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = D(\tfrac{\pi}{2})\,\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_3 = D(\tfrac{\pi}{2})\,\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

In der (x, y)-Ebene sieht das dann so aus:



Der blaue Vektor wird also offensichtlich immer um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht.

b) Die trigonometrischen Additionstheoreme für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$ hatten wir schon in dem week1.pdf in Gleichung (1.18) angegeben, sie lauten:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\,\cos\beta \;+\; \sin\beta\,\cos\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\,\cos\beta \;-\; \sin\alpha\,\sin\beta \end{aligned} \tag{1}$$

Damit bekommen wir dann

$$\begin{aligned} D(\alpha)D(\beta) &= \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \\ \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix} \\ &\overset{(1)}{=} \begin{pmatrix}\cos[\alpha+\beta] & -\sin[\alpha+\beta] \\ \sin[\alpha+\beta] & \cos[\alpha+\beta]\end{pmatrix} = D(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Aufgabe 4) Es sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl, die ungleich Null ist, $a \neq 0$. Dann leistet die Matrix

$$A := \begin{pmatrix}0 & a \\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

das Gewünschte, denn:

$$A^2 = \begin{pmatrix}0 & a \\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a \\ 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\cdot 0 + a\cdot 0 & 0\cdot a + a\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 0 & 0\cdot a + 0\cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} .$$