

**Lösungen 3. Übungsblatt**  
**Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB**

**Aufgabe 1) a,b,c,d)** Es sei

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Dann müssen wir die Potenzen  $z^{100}$ ,  $z^{101}$ ,  $z^{102}$  und  $z^{103}$  berechnen. Zum Berechnen von Potenzen  $z^n$  ist es hilfreich, das  $z$  in Polardarstellung  $z = r e^{i\varphi}$  zu schreiben, machen wir das: Der Radius  $r$  ist gegeben durch

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

Und, da  $\operatorname{Re}(z) = 1/\sqrt{2} = \operatorname{Im}(z)$  beide gleich gross sind, ist der Winkel  $45^\circ$  oder  $\pi/4$ . Also haben wir

$$z = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Damit bekommen wir dann:

$$z^{100} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{100} = e^{i100\frac{\pi}{4}} = e^{25\pi i} = e^{24\pi i} e^{\pi i} = 1 \cdot (-1) = -1$$

$$z^{101} = z^{100} z \stackrel{(a)}{=} -z = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$z^{102} = z^{100} z^2 \stackrel{(a)}{=} -z^2 = -(e^{i\frac{\pi}{4}})^2 = -e^{i\frac{\pi}{2}} = -i$$

$$z^{103} = z^{102} z \stackrel{(c)}{=} -i \cdot z = -i \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{-i+1}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

**e,f,g,h)** Es sei jetzt

$$z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

Dann müssen wir die Potenzen  $z^{300}$ ,  $z^{301}$ ,  $z^{302}$  und  $z^{303}$  berechnen. Wir schreiben das  $z$  wieder in Polardarstellung: Der Radius  $r$  ist gegeben durch

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

Das  $z$  liegt offensichtlich im ersten Quadranten und der Winkel  $\varphi$  liegt zwischen  $0$  und  $90$  Grad. Der cosinus ist gegeben durch

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}$$

und damit ist  $\varphi = 60^\circ$  oder im Bogenmaß

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

Insgesamt also:

$$z = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

Damit bekommen wir dann:

$$z^{300} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{300} = e^{i300\frac{\pi}{3}} = e^{100\pi i} = 1$$

$$z^{301} = z^{300} z \stackrel{(a)}{=} z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$z^{302} = z^{300} z^2 \stackrel{(a)}{=} z^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$z^{303} = z^{300} z^3 \stackrel{(a)}{=} z^3 = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$$

**Aufgabe 2)** a) Gemäß Gleichung (1.58) aus dem week3.pdf sind die  $n$ -ten Einheitswurzeln gegeben durch

$$z_k = e^{i2\pi\frac{k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Hier haben wir jetzt  $n = 3$  so dass wir die drei Einheitswurzeln

$$z_0 = e^{i2\pi\frac{0}{3}} = e^0 = 1$$

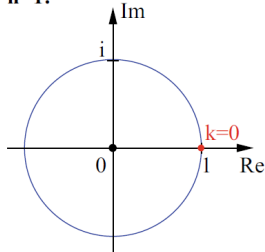
$$z_1 = e^{i2\pi\frac{1}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} =: w$$

$$z_2 = e^{i2\pi\frac{2}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \bar{w}$$

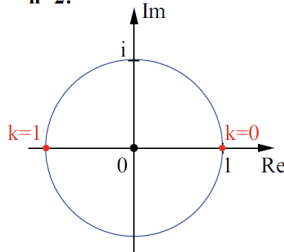
bekommen. In dem folgenden Bild sind sie in dem Kreis oben rechts unter “ $n = 3$ ” abgebildet:

$n$ -te Komplexe Wurzeln von 1 (Einheitswurzeln)  $e^{i2\pi\frac{k}{n}}, k=0,1,2,\dots,n-1$

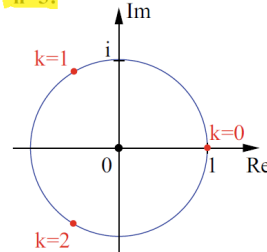
**n=1:**



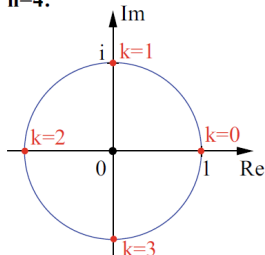
**n=2:**



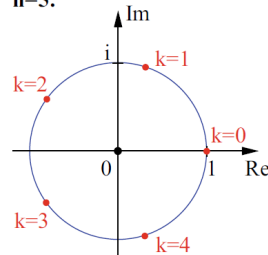
**n=3:**



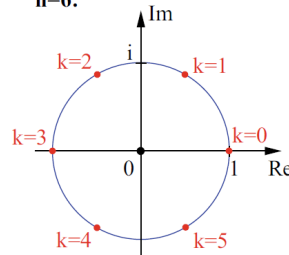
**n=4:**



**n=5:**



**n=6:**



b) Die Lösungen in Teil (a) hatten wir nicht mit  $z_1, z_2, z_3$  bezeichnet, sondern mit  $z_0, z_1$  und  $z_2$ . Wir müssen dann zeigen:

$$(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) = z^3 - 1$$

Mit

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \\ z_1 &= \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} =: w \\ z_2 &= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} =: \bar{w} \end{aligned}$$

bekommen wir dann:

$$\begin{aligned} (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) &= (z - 1)(z - w)(z - \bar{w}) \\ &= (z - 1)(z^2 - wz - \bar{w}z + w\bar{w}) \\ &= (z - 1)(z^2 - [w + \bar{w}]z + |w|^2) \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} w + \bar{w} &= -1 \\ |w|^2 &= |e^{i\frac{2\pi}{3}}|^2 = 1 \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) &= (z - 1)(z^2 - [w + \bar{w}]z + |w|^2) \\ &= (z - 1)(z^2 + z + 1) \\ &= z^3 + z^2 + z - z^2 - z - 1 \\ &= z^3 - 1 \end{aligned}$$

und es ist alles gezeigt.

**Aufgabe 3)** Nehmen wir an, die Gleichung

$$e^{i\omega t} \{ A e^{i\alpha} + B e^{i\beta} \} = A e^{i(\omega t + \alpha)} + B e^{i(\omega t + \beta)} = C e^{i(\omega t + \gamma)} = C e^{i\gamma} e^{i\omega t} \quad (1)$$

ist erfüllt. Dann gilt insbesondere

$$A e^{i(\omega t + \alpha)} + B e^{i(\omega t + \beta)} = C e^{i(\omega t + \gamma)}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} A [\cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha)] + B [\cos(\omega t + \beta) + i \sin(\omega t + \beta)] \\ = C [\cos(\omega t + \gamma) + i \sin(\omega t + \gamma)] \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} A \cos(\omega t + \alpha) + B \cos(\omega t + \beta) + i \left[ A \sin(\omega t + \alpha) + B \sin(\omega t + \beta) \right] \\ = C \cos(\omega t + \gamma) + i C \sin(\omega t + \gamma) \end{aligned} \quad (2)$$

Gleichung (2) ist eine Gleichheit von komplexen Zahlen. Komplexe Zahlen sind genau dann gleich, wenn sowohl ihr Realteil als auch ihr Imaginärteil übereinstimmen. Also: Die komplexe Gleichung (2) ist äquivalent zu den beiden reellen Gleichungen

$$A \cos(\omega t + \alpha) + B \cos(\omega t + \beta) = C \cos(\omega t + \gamma) \quad (3)$$

$$A \sin(\omega t + \alpha) + B \sin(\omega t + \beta) = C \sin(\omega t + \gamma) \quad (4)$$

Mit anderen Worten: Wenn die Gleichung (1) erfüllt ist, dann ist auch die Gleichung (4) erfüllt, und das war ja zu zeigen. Die Gleichung (1) ist nun erfüllt, falls die Gleichung (jetzt nehmen wir nur die Ausdrücke ganz rechts und ganz links in (1) )

$$e^{i\omega t} \{ A e^{i\alpha} + B e^{i\beta} \} = C e^{i\gamma} e^{i\omega t}$$

erfüllt ist. Hier können wir das  $e^{i\omega t}$  rausdividieren und bekommen

$$C e^{i\gamma} = A e^{i\alpha} + B e^{i\beta} \quad (5)$$

Wenn Gleichung (5) erfüllt ist, dann ist auch Gleichung (1) erfüllt und dann ist auch Gleichung (4) erfüllt was zu zeigen war. Also müssen  $C$  und  $\gamma$  so gewählt werden, dass (5) erfüllt ist. Das  $C \geq 0$  können wir bestimmen, indem wir den Betrag von (5) nehmen:

$$\begin{aligned} C &= |C e^{i\gamma}| = |A e^{i\alpha} + B e^{i\beta}| \\ &= \left| A \cos \alpha + iA \sin \alpha + B \cos \beta + iB \sin \beta \right| \\ &= \left[ (A \cos \alpha + B \cos \beta)^2 + (A \sin \alpha + B \sin \beta)^2 \right]^{1/2} \\ &= \left[ A^2 \cos^2 \alpha + 2AB \cos \alpha \cos \beta + B^2 \cos^2 \beta + A^2 \sin^2 \alpha + 2AB \sin \alpha \sin \beta + B^2 \sin^2 \beta \right]^{1/2} \\ &= \left[ A^2 [\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha] + 2AB [\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta] + B^2 [\cos^2 \beta + \sin^2 \beta] \right]^{1/2} \\ &= \left[ A^2 + 2AB [\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta] + B^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

oder, wenn wir noch ein Additionstheorem für  $\cos(\alpha + \beta)$  oder  $\cos(\alpha - \beta)$  benutzen,

$$C = \left[ A^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta) + B^2 \right]^{1/2} \quad (6)$$

Und das  $\gamma$  bekommen wir dann aus der Gleichung

$$e^{i\gamma} = \frac{A e^{i\alpha} + B e^{i\beta}}{C} = \frac{A e^{i\alpha} + B e^{i\beta}}{\left[ A^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta) + B^2 \right]^{1/2}} \quad (7)$$

was etwa äquivalent ist zu den beiden reellen Gleichungen

$$\cos \gamma = \frac{A \cos \alpha + B \cos \beta}{\left[ A^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta) + B^2 \right]^{1/2}}, \quad \sin \gamma = \frac{A \sin \alpha + B \sin \beta}{\left[ A^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta) + B^2 \right]^{1/2}}$$

Oder, wenn Sie lieber den tangens mögen, wir können auch schreiben

$$\tan \gamma = \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{A \sin \alpha + B \sin \beta}{A \cos \alpha + B \cos \beta}$$

b) Für den Fall

$$\begin{aligned}x_A(t) &= A \sin t \\x_B(t) &= B \sin(t + \pi/2) = B \cos t\end{aligned}$$

haben wir dann

$$\begin{aligned}\alpha &= 0 \\ \beta &= \pi/2\end{aligned}$$

so dass mit Gleichung (6)

$$C = \left[ A^2 + 2AB \cos\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) + B^2 \right]^{1/2} = [A^2 + B^2]^{1/2}$$

Mit Gleichung (7) bekommen wir dann

$$e^{i\gamma} = \frac{A e^{i0} + B e^{i\frac{\pi}{2}}}{[A^2 + B^2]^{\frac{1}{2}}} = \frac{A + B i}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Da wir  $A, B \geq 0$  vorausgesetzt haben, liegt  $A + iB$  im ersten Quadranten und wir können etwa schreiben

$$\gamma = \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Mit diesem  $\gamma$  gilt dann also:

$$x_C(t) = A \sin t + B \cos t = C \sin[t + \gamma]$$

mit der Amplitutde  $C$  gegeben durch

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} .$$