Lösungen 2. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) **a)** Für den Radius r einer komplexen Zahl

$$z = x + i\,y = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi\,) = r\,e^{i\varphi}$$

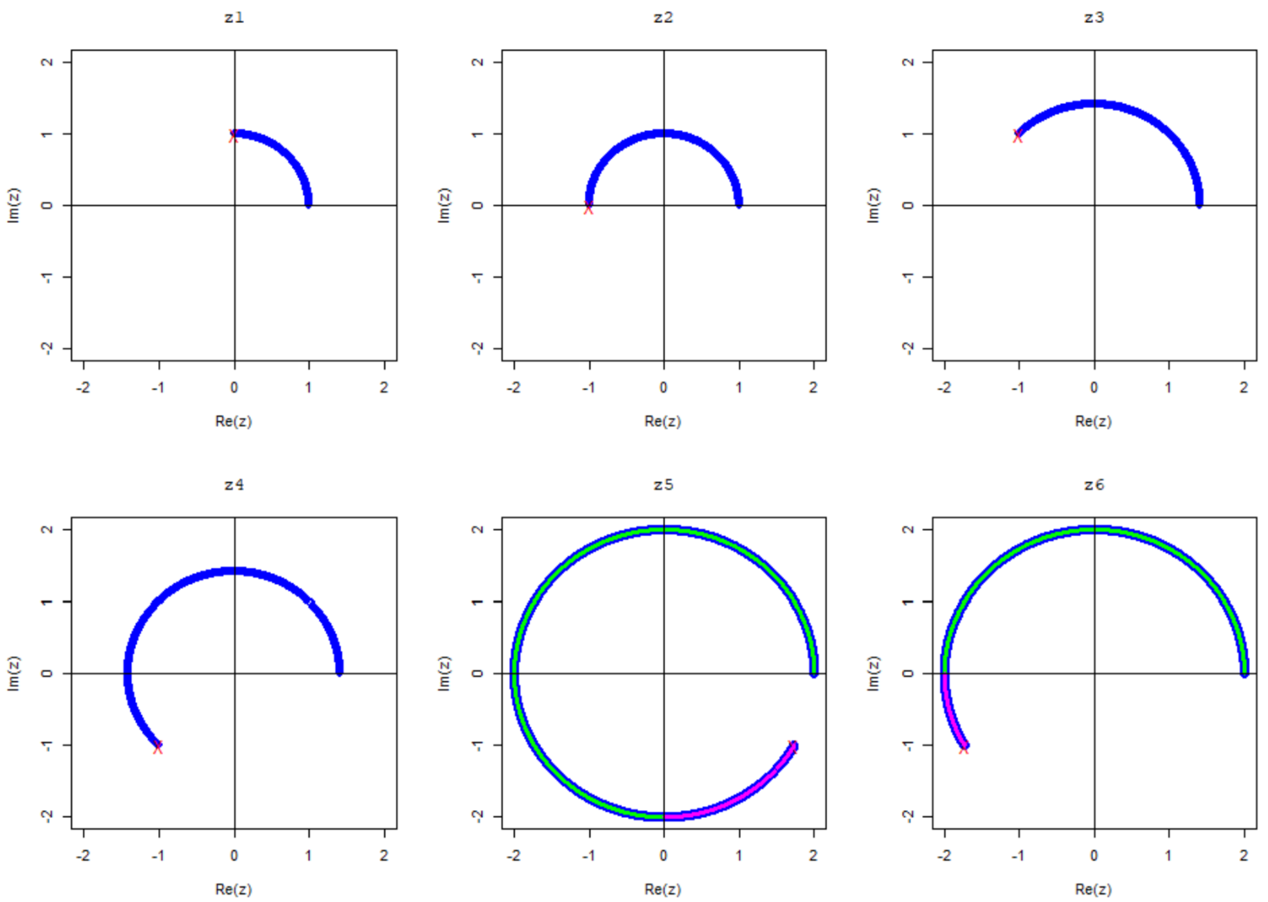
gilt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wir bekommen also:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{0^2+1^2} = 1 \\
r_2 &= \sqrt{(-1)^2+0^2} = 1 \\
r_3 &= \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2} \\
r_4 &= \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \\
r_5 &= \sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2 \\
r_6 &= \sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2} = 2
\end{aligned}$$

Um die Winkel φ_i zu bestimmen, skizzieren wir die z_1, ..., z_6 zunächst in der komplexen Ebene:



Wir müssen jeweils die blauen Winkel bestimmen, also die Winkel, die durch die blauen Kreisbögen überstrichen werden. Die ersten 4 Winkel kann man direkt aus der Skizze ablesen, das können Sie dann auch in der Klausur direkt so hinschreiben:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 90^\circ \\
\varphi_2 &= 180^\circ \\
\varphi_3 &= 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ \\
\varphi_4 &= 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ
\end{aligned}$$

oder im Bogenmaß

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \pi/2 \\
\varphi_2 &= \pi \\
\varphi_3 &= \pi/2 + \pi/4 = 3\pi/4 \\
\varphi_4 &= \pi + \pi/4 = 5\pi/4
\end{aligned}$$

Für die Winkel φ_5 und φ_6 gilt offensichtlich:

$$\begin{aligned}
\varphi_5 &= 270^\circ + \text{rosa Winkel} \\
\varphi_6 &= 180^\circ + \text{rosa Winkel}
\end{aligned}$$

wobei Sie die rosanen Winkel dann jeweils elementar mit einem rechtwinkeligen Dreieck (das ist jetzt nicht eingezeichnet, aber Sie wissen, was gemeint ist) mit sin, cos oder tan berechnen können (für die Klausur kämen da nur 30, 45 oder 60 Grad in Frage): Etwa

$$\begin{aligned}
\cos\big[\,\text{rosa Winkel}_5\,\big] &= 1/2 \\
\sin\big[\,\text{rosa Winkel}_6\,\big] &= 1/2
\end{aligned}$$

und wir bekommen

$$\begin{aligned}
\text{rosa Winkel}_5 &= 60^\circ \\
\text{rosa Winkel}_6 &= 30^\circ
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\varphi_5 &= 270^\circ + 60^\circ = 330^\circ \\
\varphi_6 &= 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ
\end{aligned}$$

oder im Bogenmass

$$\begin{aligned}
\varphi_5 &= 2\pi - \pi/6 = 11\pi/6 \\
\varphi_6 &= \pi + \pi/6 = 7\pi/6
\end{aligned}$$

1b) Gemäß der Eulerschen Formel gilt

$$r\, e^{i\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) \overset{!}{=} x + i\,y$$

Also:

$$\begin{aligned}
x &= r\,\cos\varphi \\
y &= r\,\sin\varphi
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
r_1 &= 1 \\
r_2 &= 1 \\
r_3 &= 4 \\
r_4 &= \sqrt{8} \;=\; \sqrt{4}\,\sqrt{2} \;=\; 2\,\sqrt{2}
\end{aligned}$$

bekommen wir dann:

$$\begin{aligned}
w_1 &= e^{-i\,\frac{\pi}{2}} \;=\; -\,i \\
w_2 &= e^{\,i\,\frac{3\pi}{2}} \;=\; -\,i \;=\; w_1 \\
w_3 &= 4\,e^{-i\,\pi} \;=\; -\,4 \\
w_4 &= \sqrt{8}\,e^{\,i\,\frac{7\pi}{4}} \;=\; 2\,\sqrt{2}\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}} \;=\; 2\,-\,2\,i
\end{aligned}$$

Aufgabe 2) Mit

$$z_1 \;=\; a+b\,i\,, \quad z_2 \;=\; b+a\,i\,, \quad z_3 \;=\; a-b\,i \;=\; \bar{z}_1\,, \quad z_4 \;=\; b-a\,i \;=\; \bar{z}_2$$

bekommen wir:

$$z_1\cdot z_2 \;=\; (a+b\,i)(b+a\,i) \;=\; ab\,+\,ba\,i^2\,+\,a^2 i\,+\,b^2 i \;=\; ab-ba\,+\,(a^2+b^2)\,i \;=\; (a^2+b^2)\,i$$

$$z_1+z_2 \;=\; a+b\,i\,+\,b+a\,i \;=\; a+b\,+\,(a+b)\,i \;=\; (a+b)\,(1+i)$$

$$\frac{z_1}{z_4} \;=\; \frac{a+b\,i}{b-a\,i} \;=\; \frac{a+b\,i}{b-a\,i}\cdot\frac{b+a\,i}{b+a\,i} \;=\; \frac{z_1\cdot z_2}{b^2+a^2} \;\overset{(a)}{=}\; \frac{(a^2+b^2)\,i}{b^2+a^2} \;=\; i$$

$$z_1\cdot z_3 \;=\; z_1\cdot\bar{z}_1 \;=\; |z_1|^2 \;=\; |a+ib|^2 \;=\; a^2+b^2$$

Wegen

$$i \;=\; e^{\,i\,\frac{\pi}{2}}$$

können wir die Polar-Darstellung von Teil (a), (b) und (d) dann sofort hinschreiben:

$$\begin{aligned}
z_1\cdot z_2 &= (a^2+b^2)\,i \;=\; (a^2+b^2)\,e^{\,i\,\frac{\pi}{2}} \\
\frac{z_1}{z_4} &= i \;=\; e^{\,i\,\frac{\pi}{2}} \\
z_1\cdot z_3 &= a^2+b^2 \;=\; (a^2+b^2)\,e^{\,i\cdot 0}
\end{aligned}$$

Weil der Radius r in der Polar-Darstellung $r\,e^{\,i\,\varphi}$ nicht negativ sein darf, müssen wir bei Teil (b) eine Fallunterscheidung machen:

Fall $a + b \geq 0$: Dann

$$z_1 + z_2 \;=\; (a+b)\,(1+i) \;=\; \sqrt{2}\,(a+b)\;\cdot\;\frac{1+i}{\sqrt{2}} \;=\; \sqrt{2}\,(a+b)\;\cdot\; e^{i\,\frac{\pi}{4}}$$

also $r = \sqrt{2}\,(a+b)$ und $\varphi = \pi/4$.

Fall $a + b < 0$: Dann ist $a + b = -|a+b|$ und wir können schreiben

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 \;&=\; (a+b)\,(1+i) \;=\; -\sqrt{2}\,|a+b|\;\cdot\;\frac{1+i}{\sqrt{2}} \;=\; \sqrt{2}\,|a+b|\;\cdot\;\frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\ &=\; \sqrt{2}\,|a+b|\;\cdot\; e^{i\,\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

also $r = \sqrt{2}\,|a+b|$ und $\varphi = \pi/4 + \pi = 5\pi/4$.

Aufgabe 3) Mit dem R-Code aus `Loesung2-Aufg3.txt` bekommt man etwa die folgenden Bilder: