

Lösungen 12. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) a) Mit der Regel von Sarrus bekommen wir

$$\begin{aligned}\det[A - \lambda Id] &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) + 0 + 0 - 2 \cdot 2 \cdot (-1-\lambda) - 0 - (1-\lambda)(-2)(-2) \\ &= \lambda(1+\lambda)(1-\lambda) + 4(1+\lambda) - 4(1-\lambda) \\ &= \lambda(1-\lambda^2) + 8\lambda = \lambda(9-\lambda^2) \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

Also erhalten wir die drei reellen Eigenwerte

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = +3, \quad \lambda_3 = -3$$

b) Wir müssen die Eigenvektoren bestimmen. Sie sind Lösungen des Gleichungssystems

$$[A - \lambda Id] \vec{v} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda = \lambda_1 = 0$ bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die dritte Zeile ist redundant und wir können sie weglassen. Das v_3 können wir beliebig vorgeben und bekommen dann

$$v_1 = -2v_3$$

$$v_2 = -2v_3$$

Mit der Wahl $v_3 = 1$ bekommen wir dann einen (unnormierten) Eigenvektor

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda = \lambda_2 = +3$ bekommen wir

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die dritte Zeile ist redundant und wir können sie weglassen (..ist nicht sofort offensichtlich, muss aber so sein). Das v_3 können wir wieder beliebig vorgeben und bekommen dann, nachdem wir die erste Zeile durch 2 und die zweite Zeile durch 4 geteilt haben,

$$\begin{aligned} v_1 &= v_3 \\ v_2 &= -v_3/2 \end{aligned}$$

Mit der Wahl $v_3 = 2$ bekommen wir dann einen weiteren (unnormierten) Eigenvektor

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Für $\lambda = \lambda_3 = -3$ bekommen wir

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die dritte Zeile ist wieder redundant und wir können sie weglassen (..ebenfalls nicht sofort offensichtlich, muss aber so sein). Das v_3 können wir wieder beliebig vorgeben und bekommen dann, nachdem wir die erste Zeile durch 4 und die zweite Zeile durch 2 geteilt haben,

$$\begin{aligned} v_1 &= -v_3/2 \\ v_2 &= v_3 \end{aligned}$$

Mit der Wahl $v_3 = 2$ bekommen wir dann einen dritten (unnormierten) Eigenvektor

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich haben alle $\vec{v}_j$ dieselbe Länge $\|\vec{v}_j\| = 3$. Die Matrix V mit den normierten Eigenvektoren ist dann gegeben durch

$$V = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \vec{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dieses V muss eine orthogonale Matrix sein, es muss gelten $V^{-1} = V^T$ oder $V^T V = Id$, checken wir das eben:

$$V^T V = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = Id$$

das passt. Die Spalten von V bilden also eine Orthonormalbasis (ONB) des $\mathbb{R}^3$.

c) Wir bekommen

$$\begin{aligned}
 V D V^T &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & -6 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = A .
 \end{aligned}$$

Aufgabe 2) Es ist

$$\begin{aligned}
 \det[A - \lambda Id] &= \det \begin{pmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\cos \alpha - \lambda)^2 + \sin^2 \alpha \\
 &= \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cdot \lambda + \lambda^2 + \sin^2 \alpha = \lambda^2 - 2 \cos \alpha \cdot \lambda + 1 \stackrel{!}{=} 0
 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \lambda_{\pm} = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1} = \cos \alpha \pm \sqrt{-\sin^2 \alpha} \\
 &= \cos \alpha \pm i \sin \alpha = e^{\pm i \alpha}
 \end{aligned}$$

In den Spalten von U stehen die normierten Eigenvektoren. Die Eigenvektoren sind gegeben durch

$$[A - \lambda Id] \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos \alpha - \lambda & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für λ müssen wir die Eigenwerte $\lambda_{\pm}$ einsetzen und bekommen

$$\begin{pmatrix} \mp i \sin \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \mp i \sin \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder, wenn wir beide Zeilen durch $\sin \alpha$ teilen,

$$\begin{aligned}
 \mp i v_1 - v_2 &= 0 \\
 v_1 \mp i v_2 &= 0
 \end{aligned}$$

Die zweite Zeile ist das $\pm i$ -fache der ersten Zeile und wir können sie weglassen. Wir bekommen

$$v_2 = \mp i v_1$$

und mit der Wahl $v_1 = 1$ erhalten wir dann die unnormierten Eigenvektoren

$$\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}$$

Wegen

$$\|\vec{v}_+\|^2 = (\vec{v}_+, \vec{v}_+)_{\mathbb{C}^2} = 1 \cdot 1 + \overline{(-i)}(-i) = 1 + (+i)(-i) = 1 + 1 = 2$$

$$\|\vec{v}_-\|^2 = (\vec{v}_-, \vec{v}_-)_{\mathbb{C}^2} = 1 \cdot 1 + \overline{(+i)}(+i) = 1 + (-i)(+i) = 1 + 1 = 2$$

haben wir dann

$$\|\vec{v}_+\| = \|\vec{v}_-\| = \sqrt{2}$$

Damit ist die Matrix U gegeben durch

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix}$$

und die adjungierte Matrix $U^* = \bar{U}^T$ ist gegeben durch

$$U^* = \bar{U}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ +i & -i \end{pmatrix}^T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned} U \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} U^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{+i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{+i\alpha} & +i e^{+i\alpha} \\ e^{-i\alpha} & -i e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{+i\alpha} + e^{-i\alpha} & i[e^{+i\alpha} - e^{-i\alpha}] \\ -i[e^{+i\alpha} - e^{-i\alpha}] & e^{+i\alpha} + e^{-i\alpha} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = A \end{aligned}$$

Aufgabe 3) Die Eigenwerte sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \det[A - \lambda Id] &= \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & i \\ i & -1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(-1 - \lambda) - i^2 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) + 1 \\ &= \lambda^2 - 1 + 1 = \lambda^2 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

also wir haben genau einen Eigenwert

$$\lambda = 0$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda = 0$ sind gegeben durch

$$[A - 0 \operatorname{Id}] \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die zweite Zeile ist das i -fache der ersten Zeile und wir können sie weglassen. Es bleibt

$$v_1 + i v_2 = 0$$

und wir bekommen die Eigenvektoren

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -i y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das ist aber nur eine eindimensionale Menge und es wird durch die Eigenvektoren nicht der gesamte $\mathbb{C}^2$ aufgespannt, also ist das A nicht diagonalisierbar. Und mit expliziter Rechnung,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i^2 & i-i \\ i-i & i^2+(-1)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4) Wir wollen die Matrixelemente von V mit $v_{i,j}$ und von W mit $w_{i,j}$ bezeichnen, also

$$V = (v_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{v}_1 & \cdots & \vec{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$W = (w_{i,j})_{i,j=1,\dots,m} = \begin{pmatrix} | & & | \\ \vec{w}_1 & \cdots & \vec{w}_m \\ | & & | \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Kronecker-Delta's

$$\delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

können wir die Matrixelemente von D schreiben als

$$D = (\lambda_r \delta_{r,s})_{\substack{r=1,\dots,m \\ s=1,\dots,n}}$$

Bezeichnet dann $[M]_{i,j}$ den i, j -Eintrag einer beliebigen Matrix M , dann ist das i, j -Element von WDV^T gegeben durch

$$\begin{aligned} [WDV^T]_{i,j} &= \sum_{k=1}^m [W]_{i,k} [DV^T]_{k,j} = \sum_{k=1}^m [W]_{i,k} \sum_{\ell=1}^n [D]_{k,\ell} [V^T]_{\ell,j} \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^n w_{i,k} \lambda_k \delta_{k,\ell} v_{j,\ell} = \sum_{k=1}^m w_{i,k} \lambda_k v_{j,k} \end{aligned}$$

Nun gilt mit den eingeführten Notationen

$$\begin{pmatrix} | \\ \vec{w}_k \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{1,k} \\ \vdots \\ w_{m,k} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} - & \vec{v}_k & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,k} & \cdots & v_{n,k} \end{pmatrix}$$

so dass

$$\left[\begin{pmatrix} | \\ \vec{w}_k \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \vec{v}_k & - \end{pmatrix} \right]_{i,j} = w_{i,k} v_{j,k}$$

und damit

$$[WDV^T]_{i,j} = \sum_{k=1}^m \lambda_k w_{i,k} v_{j,k} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \left[\begin{pmatrix} | \\ \vec{w}_k \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \vec{v}_k & - \end{pmatrix} \right]_{i,j}$$

Also stimmen die linke und die rechte Seite von

$$WDV^T = \sum_{k=1}^m \lambda_k \begin{pmatrix} | \\ \vec{w}_k \\ | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} - & \vec{v}_k & - \end{pmatrix}$$

elementweise überein und damit ist alles gezeigt.