

Lösungen 11. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) a) Die Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung

$$\det[A - \lambda Id] = 0$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}\det[A - \lambda Id] &= \det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

und damit

$$\lambda = \lambda_{\pm} = \pm 1$$

b) Die Eigenvektoren sind Lösungen des Gleichungssystems

$$[A - \lambda Id] \vec{v} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder, mit $\lambda = \lambda_{\pm} = \pm 1$,

$$\begin{aligned}\mp v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 \mp v_2 &= 0\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist das ∓ 1 -fache der ersten Gleichung, sie ist redundant und wir können sie weglassen. Wir wählen etwa $v_1 = 1$ und bekommen dann die zwei Eigenvektoren

$$\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2) a) Die Eigenwerte sind die Lösungen der Gleichung

$$\det[A - \lambda Id] = 0$$

Wir bekommen

$$\begin{aligned}\det[A - \lambda Id] &= \det\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 + 1 \stackrel{!}{=} 0\end{aligned}$$

und damit

$$\lambda = \lambda_{\pm} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

b) Die Eigenvektoren sind Lösungen des Gleichungssystems

$$[A - \lambda Id] \vec{v} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder, mit $\lambda = \lambda_{\pm} = \pm i$,

$$\begin{aligned}\mp i v_1 + v_2 &= 0 \\ -v_1 \mp i v_2 &= 0\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist das $\mp i$ -fache der ersten Gleichung, sie ist redundant und wir können sie weglassen. Wir wählen etwa $v_1 = 1$ und bekommen dann die zwei Eigenvektoren

$$\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3) Die allgemeine Formel für das Invertieren von 2×2 Matrizen vom Ü-Blatt 8 lautete

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

In **Aufgabe 1** haben wir

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$V^{-1} = \frac{1}{-1-1} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} V$$

Das D hat auf der Diagonalen die Eigenwerte von A stehen, wobei die Reihenfolge der Eigenwerte λ_k der Reihenfolge der Eigenvektoren $\vec{v}_k$, die stehen in den Spalten der Matrix V , entsprechen muss. Also

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit bekommen wir

$$VDV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Das $1/2$ ziehen wir ganz nach vorne und wir multiplizieren die letzten beiden Matrizen,

$$VDV^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

das passt also. In **Aufgabe 2** haben wir

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$$

und damit

$$V^{-1} = \frac{1}{-i-i} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

Das D hat auf der Diagonalen die Eigenwerte von A stehen, wobei die Reihenfolge der Eigenwerte λ_k der Reihenfolge der Eigenvektoren $\vec{v}_k$, die stehen in den Spalten der Matrix V , entsprechen muss. Also

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Damit bekommen wir

$$VDV^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & 1 \\ i & -1 \end{pmatrix}$$

Den Faktor $1/(2i)$ ziehen wir ganz nach vorne und wir multiplizieren die letzten beiden Matrizen,

$$VDV^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & i \\ 1 & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

das passt also auch.

Aufgabe 4) Wir bekommen

$$\begin{aligned} \det[A - \lambda Id] &= \det \left[\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (\lambda-1)^2 \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und erhalten damit genau einen Eigenwert

$$\lambda = 1$$

Die Eigenvektoren sind Lösungen des Gleichungssystems

$$[A - \lambda Id] \vec{v} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder, mit $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned} 0 \cdot v_1 + a \cdot v_2 &= 0 \\ 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist immer erfüllt, sie ist redundant und wir können sie weglassen. Die erste Gleichung lautet

$$a \cdot v_2 = 0$$

wobei nach Voraussetzung $a \neq 0$ betrachtet werden soll. Dann muss notwendig

$$v_2 = 0$$

sein und alle Eigenvektoren sind von der Form

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x \vec{e}_1$$

Damit wird aber nicht der ganze $\mathbb{R}^2$ aufgespannt, es gibt also keine Basis aus Eigenvektoren und damit ist A für $a \neq 0$ nicht diagonalisierbar, weder reell noch komplex diagonalisierbar.