

Lösungen 10. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) In Matrix-Vektor-Notation lautet das gegebene Gleichungssystem

$$A \vec{x} = \vec{y}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

und den Vektoren

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{y} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

a) Nach der Cramer'schen Regel gilt

$$x_1 = \frac{\det[\vec{y}, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}, \quad x_2 = \frac{\det[\vec{a}_1, \vec{y}, \vec{a}_3]}{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}, \quad x_3 = \frac{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{y}]}{\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}$$

Die Determinante im Nenner, das ist die Determinante der Koeffizientenmatrix A , haben wir bereits in Aufgabe 1 im Ü-Blatt 9 berechnet, das Resultat war -4,

$$\det A = \det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] \stackrel{\substack{\text{Lösung 9} \\ \text{Aufgabe 1}}}{=} -4$$

Für die Determinanten im Zähler bekommen wir mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz

$$\begin{aligned} \det[\vec{y}, \vec{a}_2, \vec{a}_3] &= \det \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ b & -1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -2a - 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det[\vec{a}_1, \vec{y}, \vec{a}_3] &= \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 1 & b & 1 \\ -1 & c & 1 \end{vmatrix} \\
&= -a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + b \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - c \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -2a - 2c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{y}] &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & b \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix} \\
&= a \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= -2b - 2c
\end{aligned}$$

Also insgesamt:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-2a - 2b}{-4} = \frac{a + b}{2} \\
x_2 &= \frac{-2a - 2c}{-4} = \frac{a + c}{2} \\
x_3 &= \frac{-2b - 2c}{-4} = \frac{b + c}{2}
\end{aligned}$$

b) Wir codieren das System durch das Schema

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -1 & a \\
1 & -1 & 1 & b \\
-1 & 1 & 1 & c
\end{array}$$

Wir generieren Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -1 & a \\
0 & -2 & 2 & b - a \\
0 & 2 & 0 & c + a
\end{array}$$

Wir teilen die zweite und dritte Zeile durch 2:

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 1 & -1 & a \\
0 & -1 & 1 & (b - a)/2 \\
0 & 1 & 0 & (c + a)/2
\end{array}$$

Wir generieren Nullen in der zweiten Spalte:

$$\begin{array}{ccc|c}
1 & 0 & 0 & (a + b)/2 \\
0 & -1 & 1 & (b - a)/2 \\
0 & 0 & 1 & (b + c)/2
\end{array}$$

Wir generieren Nullen in der dritten Spalte:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (a+b)/2 \\ 0 & -1 & 0 & -(a+c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (b+c)/2 \end{array}$$

Die zweite Zeile multiplizieren wir noch mit -1 :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (a+b)/2 \\ 0 & 1 & 0 & (a+c)/2 \\ 0 & 0 & 1 & (b+c)/2 \end{array}$$

Auf der rechten Seite können wir dann die Lösung ablesen, das stimmt offensichtlich überein mit dem Resultat aus Teil (a). Schreiben wir dann noch die Lösung für x_1, x_2 und x_3 in Vektor-Matrix-Notation gemäss

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a+b \\ a+c \\ b+c \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} A^{-1} \vec{y}$$

dann können wir die inverse Matrix ablesen, es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Das hatten wir ebenfalls auch schon in der ersten Aufgabe vom Ü-Blatt 9 berechnet.

c) Wir wollen das A^{-1} mit dem Gauss-Algorithmus berechnen, aber jetzt ganz ohne Buchstaben. Dazu müssen wir das Anfangs-Schema folgendermassen upsetzen:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Jetzt wiederholen wir exakt dieselben Schritte wie in Teil (b): Wir generieren Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Wir teilen die zweite und dritte Zeile durch 2:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der zweiten Spalte:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der dritten Spalte:

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Die zweite Zeile multiplizieren wir noch mit -1 :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Auf der rechten Seite steht dann die Matrix A^{-1} , das ist offensichtlich identisch mit dem Resultat aus Teil (b).

Aufgabe 2) Wir codieren das System durch das Anfangs-Schema

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & 2 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & 0 \end{array}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch -2 und die vierte Zeile durch -5 :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

Wir vertauschen die 2. mit der 4. Zeile:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & 2 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der zweiten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}$$

Wir multiplizieren die 3. Zeile mit -1, teilen die 4. Zeile durch 2 und vertauschen dann die 3. mit der 4. Zeile:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der 3. Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der 4. Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Also erhalten wir die Lösung

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = -1, \quad x_4 = 1.$$

Aufgabe 3) Zur Berechnung der inversen Matrix müssen wir das Anfangs-Schema folgendermassen upsetzen:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Jetzt machen wir exakt dieselben Schritte wie in Aufgabe 2: Wir generieren Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Wir teilen die dritte Zeile durch -2 und die vierte Zeile durch -5 :

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4/5 & 0 & 0 & -1/5 \end{array}$$

Wir vertauschen die 2. mit der 4. Zeile:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4/5 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 2 & 4 & 5 & 3/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der zweiten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4/5 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3/2 - 8/5 & 0 & -1/2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2/5 & 1 & 0 & -3/5 \end{array}$$

und vereinfachen auf der rechten Seite $3/2 - 8/5$ zu $-1/10$,

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4/5 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1/10 & 0 & -1/2 & 2/5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 2/5 & 1 & 0 & -3/5 \end{array}$$

Wir multiplizieren die 3. Zeile mit -1, teilen die 4. Zeile durch 2 und vertauschen dann die 3. mit der 4. Zeile:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -2 & -3/5 & 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4/5 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & 0 & 1/2 & -2/5 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der 3. Spalte:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2/5 & 1/2 & 0 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2/5 & -1 & 0 & 4/10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 & 0 & -3/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & 0 & 1/2 & -2/5 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der 4. Spalte:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2/5 & 1/2 & 0 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/10 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & 5/10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1/10 & 0 & 1/2 & -2/5 \end{array}$$

Also bekommen wir

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/5 & 1/2 & 0 & 1/10 \\ 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/10 & 0 & 1/2 & -2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 & 1 \\ 5 & -10 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \\ 1 & 0 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4) Wir codieren das Gleichungssystem durch das Anfangs-Schema

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & c \\ 4 & 5 & 6 & 7 & d \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der ersten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & c-3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & d-4 \end{array}$$

Wir multiplizieren die zweite Zeile mit -1 :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & c-3 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & d-4 \end{array}$$

Wir generieren Nullen in der zweiten Spalte:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-1 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist also nur dann lösbar, falls

$$\begin{aligned} c &= 1 \\ d &= 1 \end{aligned}$$

gilt. Nehmen wir also an, dass das der Fall ist. Dann sind die letzten beiden Gleichungen, also Zeile 3 und 4 im Gauss-Schema, redundant und können weggelassen werden. Es bleibt

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Das bedeutet, x_3 und x_4 können beliebig gewählt werden, und x_1 und x_2 sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= x_3 + 2x_4 - 1 \\ x_2 &= -2x_3 - 3x_4 + 1 \end{aligned}$$

Oder wir können auch schreiben, die Lösungsmenge ist gegeben durch

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Da würde man dann sagen, das ist eine 2-dimensionale Ebene im $\mathbb{R}^4$, die durch die Richtungsvektoren $(1, -2, 1, 0)$ und $(2, -3, 0, 1)$ aufgespannt wird und durch den Aufpunkt $(-1, 1, 0, 0)$ geht.