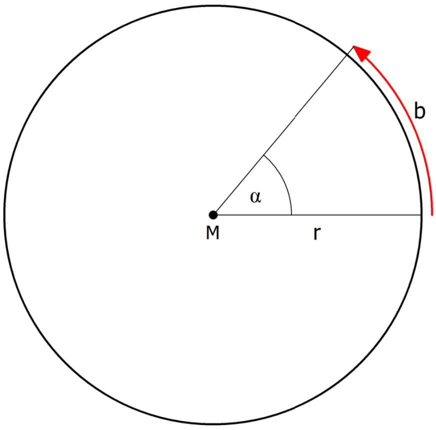
Hochschule RheinMain SS 2026
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen zum 1. Übungsblatt
Lineare Algebra für AP/UT/iING und MB

Aufgabe 1) Das Bogenmaß für einen Winkel α war folgendermaßen definiert: Man zeichnet einen Kreis mit einem beliebigen Radius r. Ein Winkel α tut dann einen Kreisbogen mit Länge b festlegen:



Man definiert:

$$[\,\alpha\,]_{\text{Bogenmass}} \;:=\; \frac{b}{r}$$

Da der Umfang U eines Kreises durch die Formel

$$U \;=\; 2\pi r$$

gegeben ist und da ein Vollkreis genau 360° entspricht, gilt dann

$$[\,360^\circ\,]_{\text{Bogenmass}} \;=\; \frac{2\pi r}{r} \;=\; 2\pi$$

Ein Halbkreis hat die Länge $U/2 = 2\pi r/2 = \pi r$, ein Viertelkreis hat die Länge $U/4 = 2\pi r/4 = \pi r/2$ so dass

$$[\,180^\circ\,]_{\text{Bogenmass}} \;=\; \frac{\pi r}{r} \;=\; \pi$$
$$[\,90^\circ\,]_{\text{Bogenmass}} \;=\; \frac{\pi r/2}{r} \;=\; \pi/2$$

Allgemein: Ist α_{Grad} ein beliebiger Winkel in Grad, dann hat der Kreisbogen b, der durch ein solches α festgelegt wird, die Länge

$$b \;=\; \frac{\alpha_{\text{Grad}}}{360^\circ}\,U \;=\; \frac{\alpha_{\text{Grad}}}{360^\circ}\,2\pi r$$

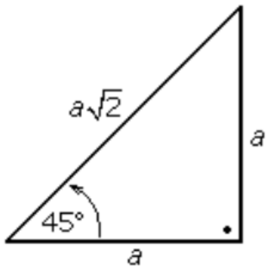
Der Winkel im Bogenmass $\alpha_{\text{Bogenmass}}$ ist dann also gegeben durch

$$\alpha_{\text{Bogenmass}} = \frac{b}{r} = \frac{\frac{\alpha_{\text{Grad}}}{360°}\,2\pi r}{r} = \frac{\alpha_{\text{Grad}}}{360°}\,2\pi$$

Damit bekommen wir dann:

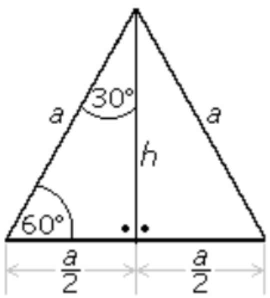
Winkel in Grad:	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	360°
Winkel im Bogenmaß:	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	2π

Aufgabe 2) Wir betrachten die folgenden Dreiecke:



$$\sin 45° = \cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\tan 45° = \cot 45° = \frac{a}{a} = 1$$



$$h = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

$$\sin 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \qquad \cos 60° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \qquad \cot 60° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\sin 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \qquad \cos 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\tan 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \qquad \cot 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$$

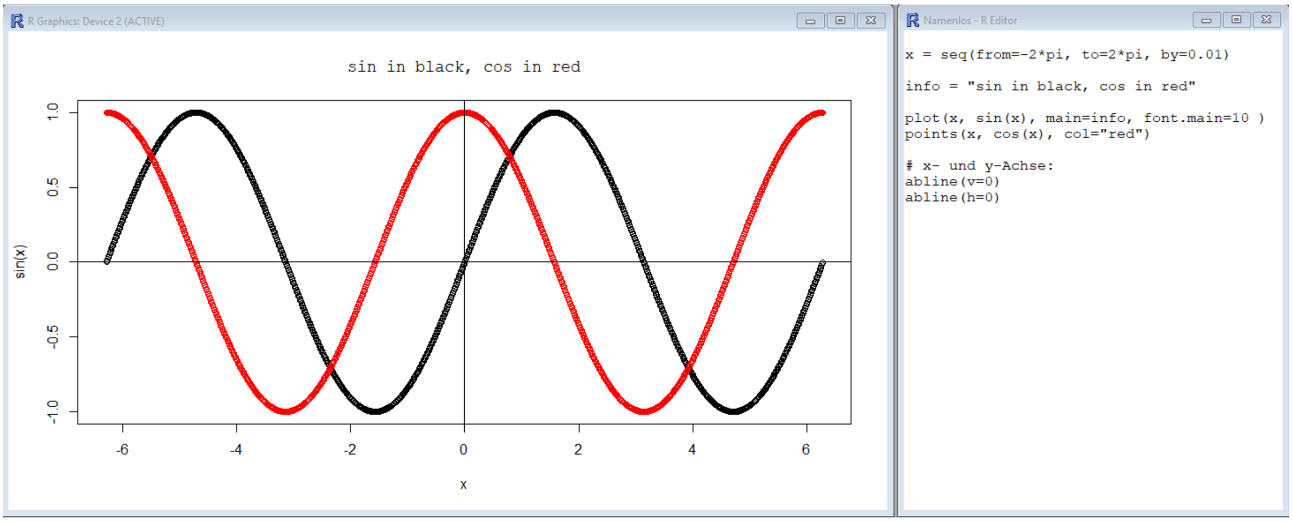
Dabei bekommt man die Werte $c = a\sqrt{2}$ für die Hypotenuse in dem ersten Dreieck und $h = a\sqrt{3}/2$ für die Höhe h in dem zweiten Dreieck mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 &= c^2 \\ \left(\tfrac{a}{2}\right)^2 + h^2 &= a^2 \end{aligned}$$

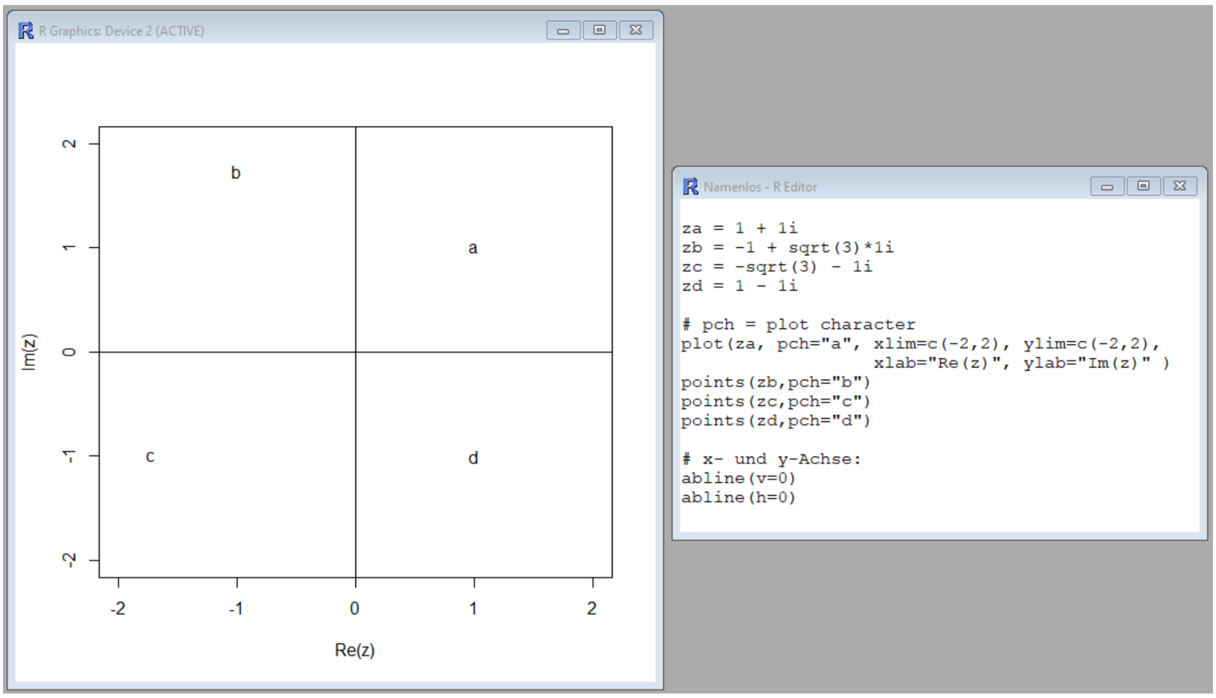
also $c^2 = 2a^2$ und $h^2 = 3/4 \cdot a^2$. Schreiben wir die Werte noch in die Tabelle rein:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0

Aufgabe 3) Der folgende Plot wurde mit der R-Software gemacht:



Aufgabe 4) z_1 liegt im ersten Quadranten, z_2 liegt im zweiten Quadranten, z_3 im dritten und z_4 im vierten Quadranten:



Für den Radius r einer komplexen Zahl

$$z \;=\; x + i\,y \;=\; r\,(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

gilt:

$$r \;=\; \sqrt{x^2 + y^2}$$

Wir bekommen also:

$$\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{1^2+1^2} &= \sqrt{2} \\
r_2 &= \sqrt{(-1)^2+3} &= 2 \\
r_3 &= \sqrt{3+(-1)^2} &= 2 \\
r_4 &= \sqrt{1^2+(-1)^2} &= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Den Winkel φ können wir mit sin, cos oder tan berechnen, nehmen wir etwa den Sinus. Es gilt

$$\sin\varphi = \frac{y}{r}$$

Wir bekommen die Werte

$$\begin{aligned}
\sin\varphi_1 &= 1/\sqrt{2} \\
\sin\varphi_2 &= \sqrt{3}/2 \\
\sin\varphi_3 &= -1/2 \\
\sin\varphi_4 &= -1/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Wie man an dem Plot der Sinus-Kurve in Aufgabe 3 sehen kann, kommen bei vorgegebenem $\sin\varphi$ typischerweise 2 Winkel in Frage, die das erfüllen. Um den richtigen Winkel zu finden, muss man sich den Plot der $z_1, ..., z_4$ in der komplexen Ebene anschauen: Wenn die φ's zwischen 0 und 2π liegen sollen (man könnte auch sagen, die sollen zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen, machen wir gleich noch), dann muss offensichtlich

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\in [\,0\,,\,\pi/2\,] \\
\varphi_2 &\in [\,\pi/2\,,\,\pi\,] \\
\varphi_3 &\in [\,\pi\,,\,3\pi/2\,] \\
\varphi_4 &\in [\,3\pi/2\,,\,2\pi\,]
\end{aligned}$$

gelten. Damit bekommen wir dann

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \pi/4 \\
\varphi_2 &= 2\pi/3 \\
\varphi_3 &= 7\pi/6 \\
\varphi_4 &= 7\pi/4
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 45^\circ \\
\varphi_2 &= 120^\circ \\
\varphi_3 &= 210^\circ \\
\varphi_4 &= 315^\circ
\end{aligned}$$

Wenn wir die Konvention wählen, dass die Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen sollen, das ist vielleicht etwas intuitiver oder zumindest -45° ist etwas intuitiver als 315°, dann musss

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &\in [\,0\,,\,\pi/2\,] \\
\varphi_2 &\in [\,\pi/2\,,\,\pi\,] \\
\varphi_3 &\in [\,-\pi\,,\,-\pi/2\,] \\
\varphi_4 &\in [\,-\pi/2\,,\,0\,]
\end{aligned}$$

sein und wir bekommen

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \pi/4 \\
\varphi_2 &= 2\pi/3 \\
\varphi_3 &= -5\pi/6 \\
\varphi_4 &= -\pi/4
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= 45^\circ \\
\varphi_2 &= 120^\circ \\
\varphi_3 &= -150^\circ \\
\varphi_4 &= -45^\circ
\end{aligned}$$

Aufgabe 5) Wir bekommen

$$z_1 \cdot z_4 = (1+i)(1-i) = 1^2 - i^2 = 1-(-1) = 2$$

$$\frac{z_1}{z_4} = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i}\,\frac{1+i}{1+i} \overset{\text{(a)}}{=} \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{z_4}{z_1} = \frac{1}{\frac{z_1}{z_4}} \overset{(b)}{=} \frac{1}{i} = \frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i} = \frac{-i}{-i^2} = -i$$

$$\begin{aligned}
z_2 \cdot z_3 &= (-1+\sqrt{3}\,i)(-\sqrt{3}-i) = (1-\sqrt{3}\,i)(\sqrt{3}+i) = \sqrt{3}+i-3i-\sqrt{3}\,i^2 \\
&= \sqrt{3}-2i+\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 2i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_3}{z_2} &= \frac{-\sqrt{3}-i}{-1+\sqrt{3}\,i} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}\,i} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-\sqrt{3}\,i}\,\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i} = \frac{\sqrt{3}+i+3i+\sqrt{3}\,i^2}{1+3} \\
&= \frac{4i}{4} = i
\end{aligned}$$

Zu Teil (e): Es gilt also $z_3/z_2 = i$ oder $z_3 = z_2 \cdot i$. Das i war ja der Punkt $(0,1)$ in der komplexen Ebene und hat die Polar-Darstellung

$$i = 0 + 1\,i = \cos(\pi/2) + \sin(\pi/2)\,i$$

Die geometrische Bedeutung der komplexen Multiplikation war ja: die Radien werden multipliziert und die Winkel werden addiert. Da das i den Radius 1 und Winkel 90° hat, hat das $z_3 = z_2 \cdot i$ dann denselben Radius wie das z_2 aber einen um 90° grösseren Winkel, also das z_2 muss man um 90° gegen den Uhrzeigersinn drehen, dann bekommt man das z_3.