

8. Übungsblatt zur Vorlesung Datenanalyse mit R

1. Aufgabe: Gegeben sei die Funktion von 2 Variablen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- a) Legen Sie die Funktion f in R als benutzerdefinierte Funktion an, so dass sie also mit dem Aufruf `f(x,y)` in R benutzt werden kann.
- b) Erstellen Sie einen 3D-Plot dieser Funktion auf dem Bereich $(x, y) \in [-20, 20] \times [-20, 20]$. Benutzen Sie dazu etwa die `persp()`-Funktion oder die `persp3D()`-Funktion aus dem `plot3D`-package. Dieses Paket müssen Sie gegebenenfalls zunächst auf Ihrem Computer installieren. Finden Sie heraus, wie das funktioniert.
- c) Benutzen Sie dann die `contour()`-Funktion, um die Höhenlinien dieser Funktion auf dem Bereich $[-20, 20] \times [-20, 20]$ darzustellen.

2. Aufgabe: Der Preisprozess gegeben durch

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) (1 + \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_k) \quad (1)$$

wird als das zeitdiskrete Black-Scholes Modell bezeichnet. Dabei ist $S(t_k)$ der Assetpreis zum Zeitpunkt $t_k = k\Delta t$, $k = 1, 2, \dots, N$, und die ϕ_k sind standard-normalverteilte Zufallszahlen,

$$(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N) = \text{rnorm}(N, 0, 1) = \text{rnorm}(N) \quad (2)$$

$N\Delta t =: T$ ist ein fester Zeithorizont. In dieser Aufgabe soll durch Simulation gezeigt werden, dass im Limes $\Delta t \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$ mit $T = N\Delta t = \text{const}$, eine explizite Lösung von (1) angegeben werden kann, nämlich

$$S(t_k) = S_0 e^{\sigma x_{t_k} + (\mu - \sigma^2/2) t_k} \quad (3)$$

mit $S_0 = S(t_0) = S(0)$. Dabei heisst die Kombination von Zufallszahlen

$$x_{t_k} := \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^k \phi_j \quad (4)$$

eine Brownsche Bewegung (mit der Definition $x_0 := 0$) und die Zufallszahlen ϕ_j in (4) müssen genau dieselben sein, die auch in den Gleichungen (1,2) benutzt worden sind. Der Prozess (3) wird dann auch als geometrische Brownsche Bewegung bezeichnet.

Schreiben Sie dazu eine Funktion

```
CompareBSPaths( mu, sigma, T, N, S0=100 )
```

die

- (i) den Vektor $S1 = (S1_{t_1}, S1_{t_2}, \dots, S1_{t_N})$ generiert, indem die Gleichung (1) mit $S1_{t_0} = S_0$ N -mal iteriert wird, und
- (ii) den Vektor $S2 = (S2_{t_1}, S2_{t_2}, \dots, S2_{t_N})$ direkt mit Hilfe der Formeln (3,4) generiert.

Die beiden Preispfade $S1$ und $S2$ sollen dann in einem Plot miteinander verglichen werden. Wählen Sie etwa die folgenden Parameterwerte: $T = 10$ (Jahre), $\mu = 2\%$ und $\sigma = 20\%$.