Hochschule RheinMain SS 2026
Prof. Dr. D. Lehmann

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Datenanalyse mit R

Aufgabe 1) Wir betrachten noch einmal die Differentialgleichung

$$\ddot{x}_t \;+\; \varepsilon^2\, x_t \;\;=\;\; 0 \tag{1}$$

zu den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_{t=0} &= x_0 \\ \dot{x}_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

Wir ersetzen das kleine t in (1) durch ein s und integrieren dann über das s von 0 bis t, wir erhalten dann unter Berücksichtigung von $\dot{x}_{t=0} = 0$ die Gleichung

$$\dot{x}_t \;+\; \varepsilon^2 \int_0^t x_s\, ds \;\;=\;\; 0$$

oder

$$x_{t+dt} \;\;=\;\; x_t \;-\; \varepsilon^2\, dt \int_0^t x_s\, ds \tag{2}$$

Implementieren Sie die Rekursion (2) in R, indem Sie das Integral auf der rechten Seite von (2) durch eine Riemannsche Summe approximieren. Untersuchen Sie dann die numerische Stabilität der Lösung x_t auf dem Intervall $[0, T]$. Wählen Sie etwa wieder die folgenden Parameterwerte:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 2 \\ x_0 &= 1 \\ T &= 50 \end{aligned}$$

und

$$dt \;\in\; \{\, 0.1\,,\; 0.01\,,\; 0.001 \,\} \;\; .$$

Aufgabe 2) Beweisen Sie die Gleichung (12) aus dem week3.pdf, das war die Formel

$$e^{\,tA} \;\;=\;\; \begin{pmatrix} \cos(\varepsilon t) & \frac{1}{\varepsilon}\,\sin(\varepsilon t) \\ -\,\varepsilon\,\sin(\varepsilon t) & \cos(\varepsilon t) \end{pmatrix}$$

mit der Matrix

$$A \;\;:=\;\; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier soll man also nichts programmieren, sondern nur mit Papier und Bleistift rechnen.