

### Lösungen zum 3. Übungsblatt Datenanalyse mit R

**Aufgabe 2)** Wir beweisen die folgende, etwas allgemeinere Aussage für das Exponential von  $2n \times 2n$  Matrizen: Es sei  $A$  eine beliebige reelle oder komplexe  $n \times n$  Matrix und  $\Omega$  sei eine  $n \times n$  Matrix mit

$$\Omega^2 = A \tag{1}$$

Weiter bezeichne  $Id$  die  $n \times n$  Einheitsmatrix. Dann gilt<sup>1</sup>

$$\exp \left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t) \Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

wobei die  $n \times n$  Matrizen  $\cos(\Omega t)$  und  $\sin(\Omega t)$  über die Potenzreihenentwicklungen der Sinus- und Cosinus-Funktion definiert sind.

**Beweis:** Wir haben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$$

so dass

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}^k = (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} = (-1)^k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & A^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} = (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & A^k \\ -A^{k+1} & 0 \end{pmatrix}$$

Mit  $A = \Omega^2$  können wir schreiben

$$\begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} = (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix} \tag{3}$$

und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} &= (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{2k} \\ -\Omega^{2k+2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^k \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

---

<sup>1</sup>es sei also vorausgesetzt, dass  $\Omega^{-1}$  existiert

Damit bekommen wir also

$$\begin{aligned}
\exp \left\{ t \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix} \right\} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^n \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & Id \\ -A & 0 \end{pmatrix}^{2k+1} \\
&\stackrel{(3,4)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k} \end{pmatrix} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} \Omega^{2k+1} & 0 \\ 0 & \Omega^{2k+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\Omega t) & 0 \\ 0 & \sin(\Omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Omega^{-1} \\ -\Omega & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & \sin(\Omega t) \Omega^{-1} \\ -\sin(\Omega t) \Omega & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und die Formel ist bewiesen. ■