

Lösungen zum 9. Übungsblatt Datenanalyse mit R

Aufgabe 1: a) Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &\stackrel{v=\lambda x}{=} \int_0^{\infty} v e^{-v} \frac{dv}{\lambda} \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{1}{\lambda} \left\{ -v e^{-v} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-v}) dv \right\} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left\{ 0 + \int_0^{\infty} e^{-v} dv \right\} = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

b) Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\{x_i\}, \lambda) &= \prod_{i=1}^n \text{Prob}[x_i \in [x_i, x_i + dx_i)] \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} dx_i \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n dx_i \end{aligned}$$

und für den Logarithmus erhalten wir

$$\begin{aligned} \log L(\{x_i\}, \lambda) &= \log \left[\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n dx_i \right] \\ &= n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \text{const} \\ &=: F(\lambda) + \text{const} \end{aligned}$$

wobei die Konstante

$$\text{const} := \log \left[\prod_{i=1}^n dx_i \right]$$

nur von λ unabhängige Terme enthält. Also das F ist gegeben durch

$$F(\lambda) = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

c) Wir maximieren F :

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \quad \lambda &= \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

also ist der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{\text{ML}}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} \ .$$