

week2: Das Binomialmodell und die Grundidee der Optionspreisbewertung

Die Binomialverteilung ist eine der wichtigsten Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Sie ergibt sich in natürlicher Weise bei der Betrachtung des Binomialmodells. Das Binomialmodell ist ein grundlegendes Modell in der Finanzmathematik, wegen seiner Einfachheit ist in diesem Modell die grundlegende Optionspreis-Logik in sehr transparenter Weise nachvollziehbar. Auf der anderen Seite ist es aber auch hinreichend reichhaltig, so dass man in einem geeigneten Limes das Black-Scholes Modell erhält, und das ist eines der standard option pricing models in der Finanzmathematik. Wir betrachten zunächst den einfachst möglichen Fall, das ist ein Ein-Perioden Binomialmodell, und dann ein Vier-Perioden Binomialmodell. Also zunächst das Ein-Perioden Binomialmodell:

<https://hsrm-mathematik.de/SS2025/Wirtschaftsmathematik3/Grundidee-Optionspreisbewertung.pdf>

Das war Level 1 sozusagen. Jetzt kommt Level 2, ein Vier-Perioden Binomialmodell:

<https://hsrm-mathematik.de/SS2025/Wirtschaftsmathematik3/binomial-model-option-pricing.xlsm>

Diese Optionspreis-Logik werden Sie nicht in der Klausur gefragt, das soll nur zur Motivation dienen. Diese Veranstaltung ist ja keine Spezialvorlesung in Finanzmathematik, sondern eine W'theorie und Statistik. Geben wir jetzt die Definition für das n -Perioden Binomialmodell an:

Definition 2.1 (n -Perioden Binomialmodell): Es bezeichne

$$\{ S(t_k) \}_{k=0}^n$$

den Preis eines liquide handelbaren Assets zu den Zeitpunkten $t_0, t_1, \dots, t_n$ und die Returns seien gegeben durch

$$\text{ret}(t_k) := \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})} \quad (1)$$

so dass

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) \cdot [1 + \text{ret}(t_k)] \quad (2)$$

Wir sagen, dass der Preisprozess (2) durch ein n -Perioden Binomialmodell gegeben ist, genau

dann, wenn es für die Returns immer nur zwei Einstellungsmöglichkeiten gibt, also wenn

$$\text{ret}(t_k) \in \{ \text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}} \} \quad (3)$$

Ende Definition

Typische Werte für tägliche Returns sind etwa

$$\text{ret}_{\text{up/down}} = \pm 1\% = \pm 0.01$$

und typische Werte für monatliche Returns sind etwa

$$\text{ret}_{\text{up/down}} = \pm 5\% = \pm 0.05 .$$

Da wir gleich mit der Gleichung (2) weiterrechnen wollen, hier nochmal eine sehr ausführliche Herleitung von (2) aus (1): Wir multiplizieren beide Seiten von (1) mit $S(t_{k-1})$ und bekommen

$$S(t_{k-1}) \cdot \text{ret}(t_k) = S(t_k) - S(t_{k-1}) \quad (4)$$

Jetzt addieren wir auf beiden Seiten von (4) ein $S(t_{k-1})$ und bekommen

$$S(t_{k-1}) \cdot \text{ret}(t_k) + S(t_{k-1}) = S(t_k) \quad (5)$$

Schliesslich klammern wir auf der linken Seite von (5) das $S(t_{k-1})$ aus und erhalten

$$S(t_{k-1}) \cdot [\text{ret}(t_k) + 1] = S(t_k) \quad (6)$$

und diese Gleichung (6) ist offensichtlich dasselbe wie die Gleichung (2). ■

Schreiben wir uns die Gleichung (2) für $k = n$ hin:

$$S(t_n) = S(t_{n-1}) \cdot [1 + \text{ret}(t_n)] \quad (7)$$

Das $S(t_{n-1})$ auf der rechten Seite von (7) können wir ebenfalls schreiben mit Gleichung (2),

$$S(t_{n-1}) = S(t_{n-2}) \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-1})] \quad (8)$$

Wir setzen (8) in (7) ein und erhalten

$$S(t_n) = S(t_{n-2}) \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-1})] \cdot [1 + \text{ret}(t_n)] \quad (9)$$

Jetzt schreiben wir das $S(t_{n-2})$ mit Hilfe von Gleichung (2)

$$S(t_{n-2}) = S(t_{n-3}) \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-2})] \quad (10)$$

und setzen das in Gleichung (9) ein,

$$S(t_n) = S(t_{n-3}) \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-2})] \cdot [1 + \text{ret}(t_{n-1})] \cdot [1 + \text{ret}(t_n)] \quad (11)$$

Das kann man offensichtlich immer so weiter machen und erhält schliesslich

$$\begin{aligned} S(t_n) &= S(t_0) \cdot [1 + \text{ret}(t_1)] \cdot [1 + \text{ret}(t_2)] \cdots [1 + \text{ret}(t_{n-1})] \cdot [1 + \text{ret}(t_n)] \\ &= S(t_0) \prod_{k=1}^n [1 + \text{ret}(t_k)] \end{aligned} \quad (12)$$

Die Gleichung (12) gilt immer, egal ob man ein Binomialmodell zu Grunde legen möchte oder etwas völlig beliebiges, halten wir das vielleicht in einem kleinen Theorem fest:

Theorem 2.1: Definiert man die Returns eines Assetpreisprozesses $\{S(t_k)\}_{k=0}^n$ durch (1),

$$\text{ret}(t_k) := \frac{S(t_k) - S(t_{k-1})}{S(t_{k-1})}$$

dann lässt sich der Preis $S(t_n)$ aus den Returns berechnen gemäss (12),

$$S(t_n) = S(t_0) \prod_{k=1}^n [1 + \text{ret}(t_k)] .$$

Betrachten wir jetzt die Preisdynamik im Binomialmodell. Wir wollen also annehmen, dass es für die Returns immer nur zwei Einstellungsmöglichkeiten gibt, wie in (3):

$$\text{ret}(t_k) \in \{ \text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}} \}$$

Welche Preise sind für ein $S(t_n)$ möglich? Wir haben n Returns $\text{ret}(t_1), \dots, \text{ret}(t_n)$, jeder einzelne Return ist entweder ein up-return oder ein down-return. Folgende Preispfade sind möglich:

n up-returns:

$$(\text{up}, \text{up}, \dots, \text{up}) \Rightarrow S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^n$$

$n - 1$ up-returns, 1 down-return:

$$\begin{aligned} (\text{up}, \text{up}, \dots, \text{up}, \text{down}) &\Rightarrow S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} (1 + \text{ret}_{\text{down}}) \\ (\text{up}, \text{up}, \dots, \text{down}, \text{up}) &\Rightarrow S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-2} (1 + \text{ret}_{\text{down}}) (1 + \text{ret}_{\text{up}}) \\ &= S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} (1 + \text{ret}_{\text{down}}) \\ &\vdots \\ (\text{down}, \text{up}, \dots, \text{up}, \text{up}) &\Rightarrow S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{down}}) (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} \\ &= S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} (1 + \text{ret}_{\text{down}}) \end{aligned}$$

Also: n Preispfade sind möglich, aber alle haben denselben Endpreis:

$$S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-1} (1 + \text{ret}_{\text{down}})^1 =: S_{n-1,1}$$

$n - k$ up-returns, k down-return:

Der Endpreis ist wieder immer derselbe,

$$S(t_n) = S_0 (1 + \text{ret}_{\text{up}})^{n-k} (1 + \text{ret}_{\text{down}})^k =: S_{n-k,k}$$

aber wie viele verschiedene Preispfade gibt es? Äquivalent: Auf wie viele verschiedene Art und Weisen kann man aus n Zeitpunkten k Zeitpunkte (für einen down-move) auswählen? Das ist wie Ziehung der Lottozahlen, aus 49 Kugeln möchte man 6 verschiedene rausziehen, und die Anzahl dafür ist ein Binomialkoeffizient,

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! (49-6)!} = \frac{49!}{6! 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13'983'816$$

Die allgemeine Definition ist also

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot [n - (k-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k}$$

und es gilt die allgemeine Formel

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Der R-Befehl zur Berechnung von Binomialkoeffizienten ist `choose(n,k)`. Fassen wir kurz zusammen:

Summary Binomialmodell: Das Binomialmodell ist definiert durch die Preisdynamik

$$S(t_k) = S(t_{k-1}) \cdot [1 + \text{ret}(t_k)], \quad \text{ret}(t_k) \in \{\text{ret}_{\text{up}}, \text{ret}_{\text{down}}\}$$

Nach n Perioden sind genau $n + 1$ verschiedene Preise $\{S_{\ell, n-\ell}\}_{\ell=0}^n$ möglich, die man etwa durch die Anzahl $\ell \in \{0, 1, \dots, n-1, n\}$ der realisierten up-moves indizieren kann,

$$S_{\ell, n-\ell} = S_0 \cdot (1 + \text{ret}_{\text{up}})^\ell (1 + \text{ret}_{\text{down}})^{n-\ell}$$

Es gibt dann genau

$$\binom{n}{\ell} = \frac{n!}{\ell! (n-\ell)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot [n - (\ell-1)]}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (\ell-1) \cdot \ell}$$

verschiedene Preispfade mit ℓ up-moves, die dann alle zu demselben Endpreis $S_{\ell, n-\ell}$ führen.

Die Binomialverteilung

..erhält man dann, wenn man einem up-move eine Wahrscheinlichkeit p_{up} zuordnet. Für das option pricing braucht man das gar nicht, man macht diese replizierenden Strategien und die tun dann den option payoff replizieren, unabhängig von irgendwelchen Wahrscheinlichkeiten. Wieso tut man das dann trotzdem? Schauen wir uns nächste Woche genauer an..