

**Probeklausur zur Vorlesung
Wirtschaftsmathematik III**

Theorie-Teil: Aufgaben 1-3, 30 Punkte

Aufgabe 1 (10 Punkte): Ein fairer Würfel mit den Zahlen 1 bis 6 und

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_6 = \frac{1}{6}$$

wird 6 mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine 4 kommt?

Aufgabe 2 (12 Punkte): Gegeben sei das Integral

$$I := \int_0^2 x e^{-\frac{x^2}{4}} dx$$

Wenn wir das Integral mit einer Monte Carlo Simulation berechnen wollten, müssten wir es in der Form

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) p(x) dx$$

schreiben, wobei $p(x)$ eine geeignete Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Geben Sie das $F(x)$ und das $p(x)$ explizit an, wenn für die Monte Carlo Simulation

- a) normalverteilte Zufallszahlen verwendet werden sollen.
- b) gleichverteilte Zufallszahlen verwendet werden sollen.
- c) Berechnen Sie schliesslich den exakten Wert von I mit Bleistift und Papier.

In dieser Aufgabe sollen Sie keine numerischen Berechnungen mit R machen.

Aufgabe 3 (8 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- a) Es sei x eine standard-normalverteilte Zufallszahl und

$$\Phi(a) := \int_{-\infty}^a e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

Drücken Sie die Wahrscheinlichkeit $\text{Prob}[|x| \leq 4]$ durch die Funktion Φ aus. Mit welchem R-Befehl können Sie das $\Phi(a)$ berechnen?

- b) Es sei x eine exponential-verteilte Zufallszahl mit Dichte

$$p(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\text{Prob}[|x| < 1]$.

Programmier-Teil: Aufgaben 4-6, 30 Punkte

Aufgabe 4 (8 Punkte): Führen Sie die folgenden Berechnungen in R durch:

- a) Legen Sie den Vektor

$$x = (-4.0, -3.9, -3.8, \dots, +3.8, +3.9, +4.0)$$

in R an.

- b) Plotten Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ über dem Intervall $[-4, 4]$, etwa indem Sie den Vektor x aus Teil (a) benutzen.

Aufgabe 5 (12 Punkte): Führen Sie die folgenden Berechnungen in R durch:

- a) Erzeugen Sie $n = 10000$ mit Mittelwert $\mu = 50$ und Standardabweichung $\sigma = 10$ normalverteilte Zufallszahlen und speichern Sie sie in der Variablen x .
- b) Erzeugen Sie ein Histogramm der Zufallszahlen x . Wählen Sie die Skalierung der vertikalen Achse so, dass die Summe der Fläche aller Rechtecke gleich 1 ist, benutzen Sie dazu den optionalen Parameter `prob`. Wählen Sie ausserdem `breaks = 40` um die Anzahl der Rechtecke in dem Histogramm etwas zu erhöhen.
- c) Plotten Sie in das Histogramm aus Teil (b) ebenfalls die theoretische Dichte der $(\mu = 50, \sigma = 10)$ -Normalverteilung, in rot.
- d) Wie gross ist die theoretische Wahrscheinlichkeit, dass sich eine $(\mu = 50, \sigma = 10)$ -normalverteilte Zufallszahl im Intervall $[30, 70]$ befindet? Wie viele von den tatsächlich generierten 10000 Zufallszahlen würde man also im Intervall $[30, 70]$ erwarten?
- e) Berechnen Sie dann die tatsächliche Zahl der Zufallszahlen im Intervall $[30, 70]$. Verwenden Sie dazu etwa den `ifelse()`-Befehl.

Aufgabe 6 (10 Punkte): Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten in R:

- a) Eine faire Münze mit

$$p_{\text{Kopf}} = \frac{1}{2}, \quad p_{\text{Zahl}} = \frac{1}{2}$$

wird 100 mal geworfen. Berechnen Sie numerisch mit Hilfe einer geeigneten R-Funktion die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 40 mal Kopf kommt.

- b) Ein fairer Würfel mit den Zahlen 1 bis 6 und

$$p_1 = p_2 = \dots = p_6 = \frac{1}{6}$$

wird 600 mal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der geworfenen Einsen zwischen 90 und 110 liegt, also grösser oder gleich 90 und kleiner oder gleich 110 ist? Benutzen Sie dazu eine geeignete R-Funktion.