Die Poissonverteilung
und
Radioaktiver Zerfall

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

Beispiel Radioaktiver Zerfall: Der Zerfall von radioaktiven Atomen ist nicht deterministisch, sondern zufällig: Betrachtet man ein einzelnes Atom, so lässt sich nicht vorhersagen, wann dieses Atom zerfällt. Man kann nur eine Wahrscheinlichkeit p dafür angeben, dass dieses Atom in der nächsten Zeiteinheit, sagen wir eine Sekunde, zerfällt oder nicht.

Die spezifische Aktivität von Uran238 beträgt

$$12 \text{ Zerfälle pro Sekunde pro Milligramm} .$$

Diese Aussage bedeutet genau genommen folgendes: Es sei N die Anzahl der Atome in 1 Milligramm Uran238. Dann ist die Anzahl X der Atome, die in der nächsten Sekunde zerfallen, binomialverteilt mit Wahrscheinlichkeit p und Umfang N und für den Erwartungswert von X gilt:

$$E[X] = N\,p = 12 .$$

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

Die Wahrscheinlichkeit p, dass ein einzelnes Atom innerhalb der nächsten Sekunde zerfällt, ist also

$$p = \frac{12}{N}$$

Uran238 hat das Atomgewicht 238u, 1Mol = $6.022 \cdot 10^{23}$ Atome haben also das Gewicht von 238 Gramm, also enthält 1 Milligramm Uran238

$$N = \frac{6,022 \times 10^{23}}{238 \times 10^{3}} = 2,53 \times 10^{18}$$

Atome. Wenn man jetzt also etwa die Wahrscheinlichkeit berechnen möchte, dass in 1 Milligramm Uran innerhalb der nächsten Sekunde genau k Atome zerfallen, so muss man

$$P(\{X = k\}) = B_{N,p}(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

berechnen mit $N = 2,53 \cdot 10^{18}$ und $p = 12/N = 4,74 \cdot 10^{-18}$. Das ist numerisch schwierig. Deshalb schreibt man

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

$$\begin{aligned} B_{N,p}(k) &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} = \binom{N}{k} \Big(\frac{Np}{N}\Big)^k \Big(1 - \frac{Np}{N}\Big)^{N-k} \\ &= \binom{N}{k} \Big(\frac{12}{N}\Big)^k \Big(1 - \frac{12}{N}\Big)^{N-k} \end{aligned}$$

und betrachtet dann den Limes N nach unendlich. Es gilt der folgende

Satz: Für festes k ϵ IN_0 und μ ϵ IR^+ gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \binom{N}{k} \Big(\frac{\mu}{N}\Big)^k \Big(1 - \frac{\mu}{N}\Big)^{N-k} = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu}$$

Definition: Eine Zufallsvariable X heisst Poisson-Verteilt mit Parameter μ ϵ IR^+ genau dann, wenn

$$P(\{X = k\}) = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu}$$

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

Beweis Satz: Wir haben:

$$\binom{N}{k}\left(\frac{\mu}{N}\right)^k\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^{N-k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-(k-1))}{k!} \times \frac{\mu^k}{N^k} \times \frac{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^N}{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^k} \\
&= \frac{\mu^k}{k!} \times \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-(k-1))}{\underbrace{N\cdot N\cdots N}_{\text{k Faktoren}}} \times \frac{1}{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^k} \times \left(1-\frac{\mu}{N}\right)^N \\
&= \frac{\mu^k}{k!} \times \underbrace{1\cdot\left(1-\frac{1}{N}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{N}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{N}\right)}_{\to 1} \times \underbrace{\frac{1}{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^k}}_{\to 1} \times \underbrace{\left(1-\frac{\mu}{N}\right)^N}_{\to e^{-\mu}}
\end{aligned}$$

$$\overset{N\to\infty}{\to} \frac{\mu^k}{k!} \times e^{-\mu}$$

∎

Die Poisson-Verteilung und Radioaktiver Zerfall

Satz: Die Zufallsvariable X sei Poisson-verteilt mit Parameter $\mu \in IR^+$.
Dann gilt:

$$E[X] = \mu \qquad \text{und} \qquad V[X] = \mu$$

Beweis: Kann man etwa zeigen mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} k\mu^k &= \left(x\frac{d}{dx}\right) x^k\Big|_{x=\mu} \\ k^2\mu^k &= \left(x\frac{d}{dx}\right)^2 x^k\Big|_{x=\mu} \end{aligned}$$