Lösungen 9. Übungsblatt
Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 2: **a)** Der Erwartungswert ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[\,x\,] \quad &= \quad \int_0^\infty x\,\lambda\,e^{-\lambda x}dx \\
&\overset{v=\lambda x}{=} \quad \int_0^\infty v\,e^{-v}\,\tfrac{dv}{\lambda} \\
&\overset{\text{part.Int.}}{=} \quad \frac{1}{\lambda}\Big\{-v\,e^{-v}\Big|_0^\infty \;-\; \int_0^\infty(-e^{-v})dv\Big\} \\
&= \quad \frac{1}{\lambda}\Big\{\;0\;+\;\int_0^\infty e^{-v}dv\Big\} \quad = \quad \frac{1}{\lambda}\,.
\end{aligned}$$

b) Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
L(\lambda) \quad = \quad L(\,\lambda\,|\,\{\tilde{x}_i\}\,) \quad &= \quad \prod_{i=1}^n \mathsf{Prob}\Big[\,x_i\in[\tilde{x}_i,\tilde{x}_i+d\tilde{x}_i)\,\Big] \\
&= \quad \prod_{i=1}^n \lambda\,e^{-\lambda\tilde{x}_i}\,d\tilde{x}_i \\
&= \quad \lambda^n\;e^{-\lambda\sum_{i=1}^n\tilde{x}_i}\;\prod_{i=1}^n d\tilde{x}_i
\end{aligned}$$

und für den Logarithmus erhalten wir (wir lassen die Schlange über den x_i weg)

$$\begin{aligned}
\log L(\,\lambda\,|\,\{x_i\}\,) \quad &= \quad \log\Big[\lambda^n\,e^{-\lambda\sum_{i=1}^n x_i}\;\prod_{i=1}^n dx_i\Big] \\
&= \quad n\log\lambda\;-\;\lambda\sum_{i=1}^n x_i\;+\;\text{const} \\
&=: \quad F(\lambda)\;+\;\text{const}
\end{aligned}$$

wobei die Konstante

$$\text{const} \quad := \quad \log\Big[\prod_{i=1}^n dx_i\Big]$$

nur von λ unabhängige Terme enthält. Also ist das F gegeben durch

$$F(\lambda) \quad = \quad n\log\lambda\;-\;\lambda\sum_{i=1}^n x_i$$

c) Wir maximieren F:

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i \stackrel{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \end{aligned}$$

also ist der Maximum-Likelihood-Schätzer gegeben durch

$$\hat{\lambda}_{\mathrm{ML}}(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i} \quad .$$