Lösungen 8. Übungsblatt
Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 2b) Wir können schreiben

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} + \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \Phi(x) + \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

In dem zweiten Integral substituieren wir

$$\begin{aligned} z &:= -y \\ dz &= -dy \end{aligned}$$

mit

$$y \in (+x, +\infty) \quad \Leftrightarrow \quad z = -y \in (-x, -\infty)$$

und bekommen

$$\begin{aligned} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} &= \int_{-x}^{-\infty} e^{-\frac{(-z)^2}{2}} \frac{(-dz)}{\sqrt{2\pi}} \\ &= -\int_{-x}^{-\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\ &= +\int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \Phi(-x) \end{aligned}$$

Also,

$$\begin{aligned} 1 &= \Phi(x) + \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \Phi(x) + \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \Phi(x) + \Phi(-x) \end{aligned}$$

und die Aussage ist bewiesen.

Aufgabe 3b) Die Dichte der Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ ist gegeben durch

$$p(x) \quad = \quad \varphi_{\mu,\sigma}(x) \quad = \quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\mathsf{Prob}\Big[\, |x-\mu| \;\leq\; k\,\sigma \,\Big] \quad &= \quad \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi\Big(\,|x-\mu| \;\leq\; k\,\sigma\,\Big)\; \varphi_{\mu,\sigma}(x)\; dx \\
&= \quad \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi\Big(\,|x-\mu| \;\leq\; k\,\sigma\,\Big)\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\; e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\; dx \\
&= \quad \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi\Big(\,\big|\tfrac{x-\mu}{\sigma}\big| \;\leq\; k\,\Big)\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\; dx \\
&= \quad \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi\Big(\,\big|\tfrac{x-\mu}{\sigma}\big| \;\leq\; k\,\Big)\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\; \tfrac{dx}{\sigma}
\end{aligned}$$

Jetzt substituieren wir

$$\begin{aligned}
\tfrac{x-\mu}{\sigma} \quad &= \quad y \\
\tfrac{dx}{\sigma} \quad &= \quad dy
\end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned}
\mathsf{Prob}\Big[\, |x-\mu| \;\leq\; k\,\sigma \,\Big] \quad &= \quad \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi\Big(\,\big|\tfrac{x-\mu}{\sigma}\big| \;\leq\; k\,\Big)\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\; \tfrac{dx}{\sigma} \\
&= \quad \textstyle\int_{-\infty}^{+\infty} \chi\big(\,|y| \;\leq\; k\,\big)\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}y^2}\; dy \\
&= \quad \mathsf{Prob}\Big[\, |y| \;\leq\; k \,\Big]
\end{aligned}$$

wobei das y in der letzten Zeile dann also für eine standard-normalverteilte Zufallszahl steht, da der Ausdruck

$$p(x) \quad = \quad \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad = \quad \varphi_{\mu=0,\sigma=1}(y) \quad = \quad \varphi(y)$$

gerade die Dichte der Standard-Normalverteilung ist. Also sind die Wahrscheinlichkeiten in Aufgabe 3b genau dieselben wie die aus Aufgabe 3a,

$$\mathsf{Prob}\Big[\, |x-\mu| \;\leq\; k\,\sigma \,\Big] \quad = \quad \mathsf{Prob}\Big[\, |y| \;\leq\; k \,\Big] \quad .$$