

Lösungen 7. Übungsblatt Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) a) Die Stammfunktion von $x e^{-x^2}$ ist $-\frac{1}{2} e^{-x^2}$, wir bekommen also

$$I = \int_0^2 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{x=2} = -\frac{1}{2} (e^{-4} - 1) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{e^4}) \approx 0.4908$$

b) Wir schreiben

$$I = \int_0^2 x e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x \chi(0 \leq x \leq 2) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx$$

mit der Indikator-Funktion

$$\chi(a \leq x \leq b) := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also haben wir die Darstellung

$$I = \int_{\mathbb{R}} F(x) p(x) dx$$

mit

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \\ F(x) &= \sqrt{\pi} x \chi(0 \leq x \leq 2) \end{aligned}$$

wobei $p(x)$ die W'keitsdichte von mit Mittelwert $\mu = 0$ und Standardabweichung $\sigma = 1/\sqrt{2}$ normalverteilten Zufallszahlen ist, das ist in der Lösung zu Aufgabe 2a weiter unten nochmal etwas ausführlicher dargestellt.

c) Wir schreiben

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 x e^{-x^2} dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} \frac{\chi(0 \leq x \leq 2)}{2-0} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} F(x) p(x) dx \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{\chi(0 \leq x \leq 2)}{2} \\ F(x) &= 2 x e^{-x^2} \end{aligned}$$

Der entsprechende R-Code steht dann im `Loesung7.txt`.

Aufgabe 2) a) Wir können schreiben

$$I = \int_0^2 e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^2 e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx \quad (1)$$

Jetzt erinnern wir uns an die Dichte der Normalverteilung mit Mittelwert μ und Standardabweichung σ , sie war gegeben durch

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2)$$

Die Verteilungsfunktion oder auch kummulierte Verteilungsfunktion war dann das Gross-Phi,

$$\Phi_{\mu,\sigma}(a) = \int_{-\infty}^a \varphi_{\mu,\sigma}(x) dx = \int_{-\infty}^a e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \quad (3)$$

Wenn wir also die Integrale auf der rechten Seite von (1) mit Hilfe des Gross-Phi $\Phi_{\mu,\sigma}$ aus (3) schreiben wollen, dann muss

$$e^{-x^2} \stackrel{!}{=} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

sein. Das bekommt man hin durch die Wahl

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ 2\sigma^2 &= 1 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \mu &= 0 \\ \sigma &= 1/\sqrt{2} \end{aligned}$$

Der Vorfaktor in dem klein-phi $\varphi_{\mu,\sigma}$ ist dann gegeben durch

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Also schreiben wir die Integrale in (1) dann folgendermassen:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^2 e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^2 e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} - \int_{-\infty}^0 e^{-x^2} \frac{dx}{\sqrt{\pi}} \right\} \\ &= \sqrt{\pi} \left\{ \Phi_{\mu=0,\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}}(2) - \Phi_{\mu=0,\sigma=\frac{1}{\sqrt{2}}}(0) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Und als numerischen Wert bekommen wir in R:

$$\begin{aligned} I &= \sqrt{\pi} \left\{ \text{pnorm}(2, \text{mean} = 0, \text{sd} = 1/\sqrt{2}) - \text{pnorm}(0, \text{mean} = 0, \text{sd} = 1/\sqrt{2}) \right\} \\ &\approx 0.8821 \end{aligned} \quad (5)$$

Aufgabe 3) a) Wir haben

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} &= e^{-\frac{\lambda^2}{2} + \lambda x - \frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{1}{2}(\lambda^2 - 2\lambda x + x^2)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(\lambda - x)^2} \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\lambda - x)^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Wir substituieren

$$\begin{aligned} y &:= x - \lambda \\ dy &= dx \end{aligned}$$

und bekommen

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(\lambda - x)^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

da in der vorletzten Zeile gerade die Dichte der Standard-Normalverteilung $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$ steht und das Integral über eine Wahrscheinlichkeitsdichte muss immer gleich 1 sein. Mit einer direkten Rechnung kann man das nicht sofort erkennen, da man die Stammfunktion von dem $\varphi(y)$ nicht durch elementare Funktionen ausdrücken kann und somit kann das Integral in der vorletzten Zeile also nicht so ohne Weiteres explizit berechnet werden.

3c) Mit

$$F(x) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{\lambda x}$$

bekommen wir

$$\mathbb{V}[F] = \mathbb{E}[F^2] - (\mathbb{E}[F])^2$$

mit

$$\mathbb{E}[F] = \int_{\mathbb{R}} F(x) p(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} e^{\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = I(\lambda) \stackrel{\text{Aufg. 3a}}{=} 1$$

Weiterhin ist

$$[F(x)]^2 = e^{-\lambda^2} e^{2\lambda x}$$

und

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[F^2] &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda^2} e^{2\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{-\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{2\lambda x} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 4\lambda x)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 - 4\lambda x + 4\lambda^2 - 4\lambda^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}([x-2\lambda]^2 - 4\lambda^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{-\lambda^2} e^{+2\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}[x-2\lambda]^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{+\lambda^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \\
&= e^{+\lambda^2} \cdot 1 = e^{+\lambda^2}
\end{aligned}$$

und damit

$$\mathbb{V}[F] = e^{\lambda^2} - 1$$

Die Abschätzung (8) aus dem week7.pdf lautet damit

$$\text{Prob}\left[|S_N(F) - \mathbb{E}[F]| \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\mathbb{V}[F]}{N\varepsilon^2} = \frac{e^{\lambda^2} - 1}{N\varepsilon^2}$$

Der Zähler auf der rechten Seite wird mit grösser werdenden λ nun sehr schnell sehr gross,

lambda	exp(lambda^2) - 1
1	1.72
2	53.60
3	8'102.08
4	8'886'109.52
5	72'004'899'336.39
6	4'311'231'547'115'190.00
7	1'907'346'572'495'100'000'000.00
8	6'235'149'080'811'620'000'000'000'000.00
9	150'609'731'458'503'000'000'000'000'000'000'000.00

deswegen müsste man dann auch die Anzahl von Zufallszahlen N sehr schnell sehr gross machen (was praktisch dann nicht mehr möglich ist) wenn das dann damit noch klappen sollte.