Hochschule RheinMain SS 2025
Prof. Dr. D. Lehmann

Lösungen 6. Übungsblatt
Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) a) Die Stammfunktion von $x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$ ist $-\,e^{-\frac{x^2}{2}}$, wir bekommen also

$$I \;=\; \int_0^2 x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \;=\; -\,e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{x=0}^{x=2} \;=\; -\,e^{-2} - (-1) \;=\; 1 - \tfrac{1}{e^2} \;\approx\; 0.8647$$

b) Wir schreiben

$$I \;=\; \int_0^2 x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \;=\; \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\chi(0\le x\le 2)\,\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

mit der Indikator-Funktion

$$\chi(a\le x\le b) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } \ a\le x\le b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also haben wir die Darstellung

$$I \;=\; \int_{\mathbb{R}} F(x)\,p(x)\,dx$$

mit

$$p(x) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$F(x) \;=\; \sqrt{2\pi}\,x\,\chi(0\le x\le 2)$$

c) Wir schreiben

$$I \;=\; \int_0^2 x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \;=\; 2\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,\tfrac{\chi(0\le x\le 2)}{2-0}\,dx$$
$$=\; \int_{\mathbb{R}} F(x)\,p(x)\,dx$$

mit

$$p(x) \;=\; \tfrac{\chi(0\le x\le 2)}{2}$$
$$F(x) \;=\; 2\,x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Der entsprechende R-Code steht dann im `Loesung6.txt` .

Aufgabe 2) a) Es ist

$$e^{-x}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \;=\; e^{-\frac{x^2}{2}-x} \;=\; e^{-\frac{1}{2}(x^2+2x)} \;=\; e^{-\frac{1}{2}(x^2+2x+1-1)} \;=\; e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2} \cdot e^{+\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{e} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2}$$

Damit bekommen wir

$$I \;=\; \int_0^\infty e^{-x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;=\; \sqrt{e} \cdot \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}(x+1)^2}\, dx \;\overset{y=x+1}{=}\; \sqrt{e} \cdot \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\, dy$$

$$= \sqrt{2\pi\, e} \cdot \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}$$

$$= \sqrt{2\pi\, e} \cdot \left[\, \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \;-\; \int_{-\infty}^1 e^{-\frac{1}{2}y^2}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \,\right]$$

$$= \sqrt{2\pi\, e} \cdot \big[\, 1 - \Phi(1) \big]$$

2c) Wir schreiben

$$I \;=\; \int_0^\infty e^{-x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;=\; \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-x}\, \chi(x \geq 0)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} F(x)\, p(x)\, dx$$

mit

$$p(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F(x) \;=\; \sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, \chi(x \geq 0)$$

2d) Wir schreiben

$$I \;=\; \int_0^\infty e^{-x}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \;=\; \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-x}\, \chi(x \geq 0)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} F(x)\, p(x)\, dx$$

mit

$$p(x) \;=\; e^{-x}\, \chi(x \geq 0)$$

$$F(x) \;=\; e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Der entsprechende R-Code steht dann wieder im `Loesung6.txt` .