

Lösungen 3. Übungsblatt Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) Wir haben ein 4-Perioden Binomialmodell, also ist $n = 4$. Die Wahrscheinlichkeit p_{up} ist in dem Theorem 3.1 angegeben, die Formeln waren

$$p_{\text{up}} := \frac{-\text{ret}_{\text{down}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}}, \quad p_{\text{down}} := \frac{+\text{ret}_{\text{up}}}{\text{ret}_{\text{up}} - \text{ret}_{\text{down}}}$$

Die up- und down-returns kann man aus dem Realized Stock Price Path Bild ablesen, das sind immer plus oder minus 10 Prozent, also

$$\text{ret}_{\text{up}} = +10\%, \quad \text{ret}_{\text{down}} = -10\%$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} p_{\text{up}} &= \frac{-(-10\%)}{10\% - (-10\%)} = \frac{10\%}{20\%} = \frac{1}{2} \\ p_{\text{down}} &= \frac{+10\%}{10\% - (-10\%)} = \frac{10\%}{20\%} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Wir müssen jetzt zeigen:

$$\mathbb{E}[H] = \sum_{k=0}^4 H(S_{k,4-k}) B_{n=4, p_{\text{up}}=1/2}(k) \stackrel{?}{=} 11.25$$

Schreiben wir die Summe explizit aus:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H] &= \sum_{k=0}^4 H(S_{k,4-k}) B_{n=4, p_{\text{up}}=1/2}(k) \\ &= H(S_{0,4}) B_{4, \frac{1}{2}}(0) + H(S_{1,3}) B_{4, \frac{1}{2}}(1) + H(S_{2,2}) B_{4, \frac{1}{2}}(2) \\ &\quad + H(S_{3,1}) B_{4, \frac{1}{2}}(3) + H(S_{4,0}) B_{4, \frac{1}{2}}(4) \\ &= H(65.61) B_{4, \frac{1}{2}}(0) + H(80.19) B_{4, \frac{1}{2}}(1) + H(98.01) B_{4, \frac{1}{2}}(2) \\ &\quad + H(119.79) B_{4, \frac{1}{2}}(3) + H(146.41) B_{4, \frac{1}{2}}(4) \end{aligned}$$

Jetzt können wir für die H 's den konkreten Option Payoff einsetzen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H] &= 0 \cdot B_{4, \frac{1}{2}}(0) + 0 \cdot B_{4, \frac{1}{2}}(1) + 10 \cdot B_{4, \frac{1}{2}}(2) \\ &\quad + 20 \cdot B_{4, \frac{1}{2}}(3) + 40 \cdot B_{4, \frac{1}{2}}(4) \end{aligned}$$

Nun müssen wir noch die Binomialwahrscheinlichkeiten $B_{4,\frac{1}{2}}(k)$ berechnen. Die allgemeine Formel war in Definition 3.1 angegeben,

$$B_{n,p}(k) := \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

In unserem Fall haben wir also

$$\begin{aligned} B_{4,\frac{1}{2}}(k) &= \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &= \frac{1}{16} \binom{4}{k} \end{aligned}$$

Für die Binomialkoeffizienten hat man die folgenden allgemeinen Formeln:

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$$

und

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

Damit erhalten wir

$$\binom{4}{0} = 1, \quad \binom{4}{1} = 4, \quad \binom{4}{2} = 6, \quad \binom{4}{3} = 4, \quad \binom{4}{4} = 1$$

und bekommen schliesslich

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H] &= 10 \cdot B_{4,\frac{1}{2}}(2) + 20 \cdot B_{4,\frac{1}{2}}(3) + 40 \cdot B_{4,\frac{1}{2}}(4) \\ &= \frac{10}{16} \binom{4}{2} + \frac{20}{16} \binom{4}{3} + \frac{40}{16} \binom{4}{4} \\ &= \frac{60}{16} + \frac{80}{16} + \frac{40}{16} = \frac{180}{16} = 10 + \frac{20}{16} \\ &= 11 + \frac{4}{16} = 11\frac{1}{4} = 11.25. \end{aligned}$$

Aufgabe 2a) (i) Es bezeichne k die Anzahl der Köpfe beim 8-maligen Werfen einer Münze. Dann ist das k binomialverteilt mit Umfang $n = 8$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $p_{\text{Kopf}} = \frac{1}{2}$ (das können Sie einfach so hinschreiben und müssen das nicht weiter begründen). Also beträgt die W'keit für genau 4 Köpfe

$$\begin{aligned} \text{Prob}[k = 4] &= B_{n=8,p=\frac{1}{2}}(4) = \binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{8-4} \\ &= \binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256} \binom{8}{4} = \frac{1}{256} \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\ &= \frac{1}{256} \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 3} = \frac{1}{256} \frac{7 \cdot 2 \cdot 5}{1} = \frac{70}{256} \approx 0.2734 \end{aligned}$$

2a) (ii) Wir wählen eine neue Notation und bezeichnen mit k jetzt die Anzahl von ‘Zahl’ beim 8-maligen Werfen einer Münze. Dann ist das k binomialverteilt mit Umfang $n = 8$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $p_{\text{Zahl}} = \frac{1}{2}$ (können Sie wieder einfach so hinschreiben und müssen das nicht weiter begründen). Höchstens zwei mal Zahl meint: 0 mal Zahl oder 1 mal Zahl oder 2 mal Zahl, also $k \leq 2$. Wir bekommen

$$\text{Prob}[k \leq 2] = B_{n=8, p=\frac{1}{2}}(0) + B_{n=8, p=\frac{1}{2}}(1) + B_{n=8, p=\frac{1}{2}}(2)$$

Mit

$$B_{n=8, p=\frac{1}{2}}(k) = \binom{8}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{8-k} = \frac{1}{2^8} \binom{8}{k} = \frac{1}{256} \binom{8}{k}$$

erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \text{Prob}[k \leq 2] &= \frac{1}{256} \left[\binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2} \right] = \frac{1}{256} \left[1 + 8 + \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \right] \\ &= \frac{37}{256} \approx 0.1445 . \end{aligned}$$

2b) Es bezeichne k die Anzahl der Sechsen beim 10-maligen Werfen eines fairen Würfels. Dann ist das k binomialverteilt mit Umfang $n = 10$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $p_6 = \frac{1}{6}$ (können Sie wieder einfach so hinschreiben, ohne weitere Begründung). Also

$$\begin{aligned} \text{Prob}[k = 2] &= B_{n=10, p=\frac{1}{6}}(2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{10-2} \\ &= \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{6^2} \cdot \frac{5^8}{6^8} = 45 \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 0.2907 . \end{aligned}$$

Aufgabe 3) a) Wir ziehen $n = 100$ mal eine Kugel und wir bekommen eine rote mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{100}$ oder wir bekommen keine rote mit Gegenwahrscheinlichkeit $q = 1 - p = \frac{99}{100}$. Jedesmal sind also wieder nur zwei verschiedene Ausgänge möglich, so dass die Anzahl k der gezogenen roten Kugeln binomialverteilt ist mit $n = 100$ und $p = \frac{1}{100}$. Die W'keit, keine rote Kugel zu ziehen, ist dann also gegeben durch

$$\begin{aligned} B_{n=100, p=\frac{1}{100}}(k=0) &= \binom{100}{0} \left(\frac{1}{100}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100-0} \\ &= \left(\frac{99}{100}\right)^{100} \approx 0.3660 \end{aligned} \tag{1}$$

b) In den slides Poissonverteilung.pdf wurde die folgende Formel bewiesen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_{n, p=\frac{\lambda}{n}}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Der Wert von $n = 100$ ist schon etwas grösser, so dass man die folgende Näherung ausprobieren kann, wir schreiben das zunächst mal für beliebiges k und beliebiges λ hin, nicht nur für $k = 0$ und $\lambda = 1$:

$$\binom{100}{k} \left(\frac{\lambda}{100}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{100}\right)^{100-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Für das λ müssen wir offensichtlich den Wert $\lambda = n \cdot p = 100 \cdot \frac{1}{100} = 1$ wählen und in unserem Fall ist $k = 0$, also würden wir die Approximation

$$\left(\frac{99}{100}\right)^{100} = \binom{100}{0} \left(\frac{1}{100}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100} \approx \frac{1^0}{0!} e^{-1} = e^{-1}$$

zu überprüfen haben. Den numerischen Wert für die linke Seite haben wir oben schon angegeben, das war 0.3660, und für e^{-1} findet man den numerischen Wert von $e^{-1} = 0.367879\dots$, das kommt also recht gut hin.