

Lösungen 2. Übungsblatt Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) Wir haben ein Startgeld V_0 . Zum Zeitpunkt $t = 0$ kaufen wir δ Stücke vom Underlying, dafür müssen wir (die Bank, der Optionsverkäufer) $\delta \cdot S_0$ bezahlen. Das Bank-Portfolio zum Zeitpunkt $t = 0$ sieht also so aus:

$$V_0 = \underbrace{V_0 - \delta S_0}_{\text{cash}} + \underbrace{\delta S_0}_{\text{Aktie}}$$

Die Zeit vergeht von $t = 0$ nach $t = T$. Die Cash-Position bleibt gleich (wir nehmen an, dass die Zinsen 0 sind, $r = 0$). Die Aktien-Position verändert ihren Wert von δS_0 zu δS_T mit $S_T \in \{S_{\text{up}}, S_{\text{down}}\}$. Also, der Wert des Bank-Portfolios zur Zeit $t = T$ beträgt

$$V_T = \underbrace{V_0 - \delta S_0}_{\text{cash}} + \underbrace{\delta S_T}_{\text{Aktie}} \stackrel{!}{=} H(S_T)$$

Dabei ist $H(S_T) \in \{H_{\text{up}}, H_{\text{down}}\}$ die Optionsauszahlung: Wenn das Underlying gestiegen ist, ist $H(S_T) = H(S_{\text{up}}) = H_{\text{up}}$ und wenn das Underlying gefallen ist, ist $H(S_T) = H(S_{\text{down}}) = H_{\text{down}}$. Also erhalten wir die beiden Gleichungen

$$V_0 - \delta S_0 + \delta S_{\text{up}} \stackrel{!}{=} H_{\text{up}}$$

$$V_0 - \delta S_0 + \delta S_{\text{down}} \stackrel{!}{=} H_{\text{down}}$$

Wenn wir die zweite von der ersten Gleichung abziehen, fällt das V_0 und das δS_0 weg und wir bekommen

$$\delta(S_{\text{up}} - S_{\text{down}}) = H_{\text{up}} - H_{\text{down}}$$

oder

$$\delta = \frac{H_{\text{up}} - H_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}$$

Das können wir etwa in die erste Gleichung einsetzen und bekommen

$$\begin{aligned} V_0 &= H_{\text{up}} - \delta(S_{\text{up}} - S_0) \\ &= H_{\text{up}} - \frac{H_{\text{up}} - H_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} (S_{\text{up}} - S_0) \\ &= H_{\text{up}} \frac{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} - H_{\text{up}} \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} + H_{\text{down}} \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} \\ &= H_{\text{up}} \frac{S_0 - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} + H_{\text{down}} \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} \end{aligned}$$

oder

$$V_0 = H_{\text{up}} w_{\text{up}} + H_{\text{down}} w_{\text{down}}$$

mit den Gewichten

$$\begin{aligned} w_{\text{up}} &:= \frac{S_0 - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} \\ w_{\text{down}} &:= \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} \end{aligned}$$

so dass

$$w_{\text{up}} + w_{\text{down}} = \frac{S_0 - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} + \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} = \frac{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} = 1.$$

c) Betrachten wir noch als konkretes Beispiel für diese Formeln die Rechnung auf slide 10 von [Grundidee-Optionspreisbewertung.pdf](#). Wir bekommen

$$\delta = \frac{H_{\text{up}} - H_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} = \frac{5 - 0}{105 - 95} = \frac{1}{2}$$

also wir müssen eine halbe Aktie kaufen, das passt schonmal. Und die Gewichte w_{up} und w_{down} sind

$$\begin{aligned} w_{\text{up}} &= \frac{S_0 - S_{\text{down}}}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} = \frac{100 - 95}{105 - 95} = \frac{1}{2} \\ w_{\text{down}} &= \frac{S_{\text{up}} - S_0}{S_{\text{up}} - S_{\text{down}}} = \frac{105 - 100}{105 - 95} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

so dass wir für den Optionspreis, das ist dasselbe wie das Startgeld V_0 , das wir also benötigen, um die replizierende Strategie aufsetzen zu können, erhalten:

$$V_0 = H_{\text{up}} w_{\text{up}} + H_{\text{down}} w_{\text{down}} = 5 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = 2,50$$

das passt also auch.