Hochschule RheinMain
Prof. Dr. D. Lehmann SS 2025

Lösungen Übungsblatt 1
Wirtschaftsmathematik III

Aufgabe 1) Wir haben mit $x \cdot x^k \; = \; x^{k+1}$

$$\begin{aligned} s_n \;&=\; 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} \\ x \cdot s_n \;&=\; x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n \end{aligned}$$

Tun wir das vielleicht etwas übersichtlicher hinschreiben,

$$\begin{aligned} s_n \;&=\; 1 + x + x^2 + \qquad \cdots + x^{n-3} + x^{n-2} + x^{n-1} \\ x \cdot s_n \;&=\; \qquad x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n \end{aligned}$$

Also bekommen wir

$$s_n - x \cdot s_n \;=\; 1 - x^n$$

oder

$$s_n \cdot (1 - x) \;=\; 1 - x^n$$

$$\Leftrightarrow \qquad s_n \;=\; \frac{1 - x^n}{1 - x} \;=\; \frac{x^n - 1}{x - 1}$$

und die Formel ist bewiesen.

Aufgabe 2) Nach Definition ist

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu,\sigma}(x) \;&:=\; \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \frac{dy}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\ &=\; \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \, \frac{dy}{\sigma\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Jetzt machen wir die Variablen-Substitution

$$v \;:=\; \frac{y - \mu}{\sigma}$$

mit

$$\frac{dv}{dy} \;=\; \frac{1}{\sigma} \qquad \Rightarrow \qquad dv \;=\; \frac{dy}{\sigma}$$

Wenn das y von $-\infty$ bis x geht, dann geht das v ebenfalls von $-\infty$ bis nach $\frac{x-\mu}{\sigma}$. Also bekommen wir

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mu,\sigma}(x) &= \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} \frac{dy}{\sigma\sqrt{2\pi}} \\
&= \int_{-\infty}^{\frac{x-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{1}{2}v^2} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} \\
&= \Phi_{0,1}\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big) \;=\; \Phi\big(\frac{x-\mu}{\sigma}\big)
\end{aligned}$$

und die Aussage ist bewiesen.

Aufgabe 3) Wir haben

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}[F] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big[\, F(x) - \mathsf{E}[F] \,\big]^2 p(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[\, \big(F(x)\big)^2 - 2\,F(x)\,\mathsf{E}[F] + (\,\mathsf{E}[F]\,)^2 \,\Big]\, p(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(F(x)\big)^2 p(x)\,dx \;-\; 2\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\mathsf{E}[F]\,p(x)\,dx \;+\; \int_{-\infty}^{+\infty} (\,\mathsf{E}[F]\,)^2\,p(x)\,dx
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert $\mathsf{E}[F]$ ist eine reine Zahl, der hängt nicht mehr von x ab. Wir können ihn also aus dem Integral herausziehen und bekommen

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}[F] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \big(F(x)\big)^2 p(x)\,dx \;-\; 2\,\mathsf{E}[F]\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,p(x)\,dx}_{=\,\mathsf{E}[F]} + (\,\mathsf{E}[F]\,)^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx}_{=\,1} \\
&= \mathsf{E}[\,F^2\,] \;-\; 2\,\mathsf{E}[F]\,\mathsf{E}[F] \;+\; (\,\mathsf{E}[F]\,)^2 \\
&= \mathsf{E}[\,F^2\,] \;-\; (\,\mathsf{E}[F]\,)^2
\end{aligned}$$

Damit haben wir die Formel bewiesen.

Aufgabe 4a) Die Dichte der Gleichverteilung auf dem Intervall $[a,b]$ war gegeben durch

$$p_{a,b}(x) \;:=\; \tfrac{1}{b-a}\,\chi(a \le x \le b)$$

mit der Indikator-Funktion

$$\chi(A) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ wahr ist} \\ 0 & \text{falls } A \text{ falsch ist} \end{cases}$$

Also bekommen wir

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[x^2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, p_{a,b}(x)\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \tfrac{1}{b-a}\, \chi(a \leq x \leq b)\, dx \\
&= \int_a^b x^2 \cdot \tfrac{1}{b-a}\, dx \;=\; \tfrac{1}{b-a} \int_a^b x^2\, dx \;=\; \tfrac{1}{b-a}\, \tfrac{x^3}{3}\Big|_a^b \;=\; \tfrac{1}{b-a}\, \tfrac{b^3-a^3}{3}
\end{aligned}$$

b) Wir multiplizieren beide Seiten mit $(b-a)$ und erhalten dann auf der rechten Seite

$$(b^2+ba+a^2)(b-a) \;=\; b^3 + b^2a + ba^2 - (b^2a + ba^2 + a^3) \;=\; b^3 - a^3$$

Damit ist die Identität gezeigt.

c) Schliesslich bekommen wir mit Teil (b) und der Formel aus Aufgabe 3

$$\begin{aligned}
\mathsf{V}[x] &= \mathsf{E}[x^2] - (\,\mathsf{E}[x]\,)^2 \;=\; \tfrac{b^2+ba+a^2}{3} - \tfrac{(b+a)^2}{4} \;=\; \tfrac{b^2+ba+a^2}{3} - \tfrac{b^2+2ba+a^2}{4} \\
&= \tfrac{4b^2+4ba+4a^2}{12} - \tfrac{3b^2+6ba+3a^2}{12} \;=\; \tfrac{b^2-2ba+a^2}{12} \;=\; \tfrac{(b-a)^2}{12}
\end{aligned}$$

und wir haben alles gezeigt.